CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

KONFERENCJA DLA NAUCZYCIELI MATEMATYKI

PAŹDZIERNIK 2014

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

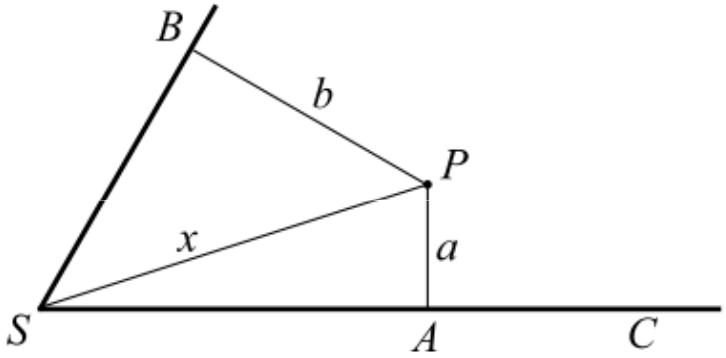
Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Zadania na dowodzenie z geometrii

Jednym z wymagań ogólnych nowej podstawy programowej z matematyki na czwartym etapie kształcenia, ale również i na wcześniejszych etapach, jest umiejętność prowadzenia rozumowania matematycznego czy argumentacji. Dlatego też w każdym arkuszu z egzaminu maturalnego z matematyki od roku 2010 znajdują się zadania sprawdzające te umiejętności. Zazwyczaj znajdują się w arkuszu co najmniej dwa zadania na dowodzenie, wśród nich jest zadanie z geometrii. Zadania te sprawiają zdającym trudności. Mają one jednak duże walory dydaktyczne, dają zdającym możliwość wykazania się pomysłowością, często do ich rozwiązania wystarczają im w zupełności umiejętności wyniesione z gimnazjum.

Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Zadanie 1. Dany jest kąt o mierze 60° oraz punkt P leżący wewnątrz tego kąta. Odległości punktu P od ramion tego kąta są równe a i b.

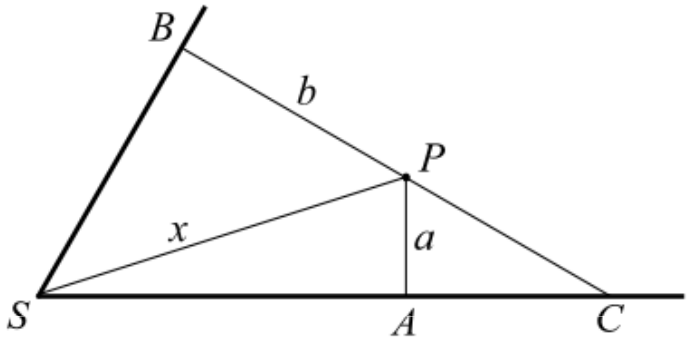


Udowodnij, że odległość punktu P od wierzchołka kąta jest równa $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}$.

Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

I sposób rozwiązania

Niech C będzie punktem przecięcia prostej BP i ramienia AS kąta.



Wówczas trójkąt APC to „połowa” trójkąta równobocznego, więc $PC = 2a$. Zatem $BC = 2a + b$.

Trójkąt SBC także jest „połową” trójkąta równobocznego, więc $BS = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{2a+b}{\sqrt{3}}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BPS otrzymujmy

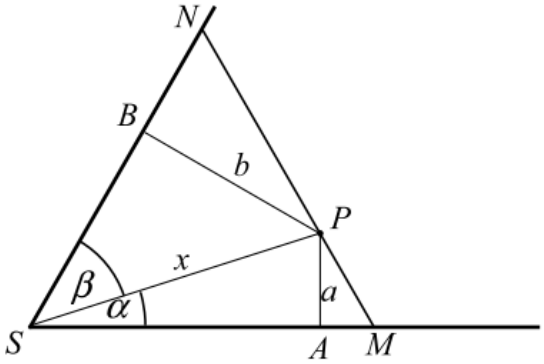
$$x = \sqrt{BS^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{2a+b}{\sqrt{3}}\right)^2 + b^2} = \sqrt{\frac{4a^2+4ab+b^2}{3} + b^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}.$$

To kończy dowód.

Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

II sposób rozwiązania

Przez punkt P poprowadźmy odcinek MN tak, żeby trójkąt MNS był równoboczny.



Wówczas trójkąty MAP i NBP to „połowy” trójkątów równobocznych, więc

$$AM=\frac{AP}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}},\ NP=2\cdot AP=\frac{2a}{\sqrt{3}},\ BN=\frac{BP}{\sqrt{3}}=\frac{b}{\sqrt{3}}\ ,\ PN=2\cdot BP=\frac{2b}{\sqrt{3}}.$$

Wynika stąd, że długość boku trójkąta MNS jest równa

$$MN=MP+NP=\frac{2a}{\sqrt{3}}+\frac{2b}{\sqrt{3}}=\frac{2a+2b}{\sqrt{3}},$$

natomiast długość odcinka AS jest równa

$$AS=MS-AM=\frac{2a+2b}{\sqrt{3}}-\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a+2b}{\sqrt{3}}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta SAP otrzymujemy

$$x=\sqrt{AS^2+a^2}=\sqrt{\left(\frac{a+2b}{\sqrt{3}}\right)^2+a^2}=\sqrt{\frac{a^2+4ab+4b^2}{3}+a^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}\ .$$

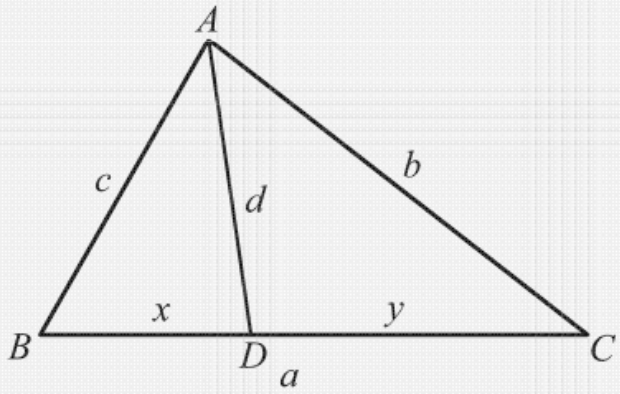
To kończy dowód.

Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

III sposób rozwiązania

Początkowa część rozwiązania, a więc pomysł dorysowania odcinka MN, a w efekcie „zobaczenie" trójkąta równobocznego otwiera zupełnie nowe możliwości. Jedną z nich jest zastosowanie twierdzenie Stewarta. Przypomnijmy najpierw to twierdzenie, którego dowód możemy, jako nietrudne zadanie podać uczniom przy okazji omawiania twierdzenia cosinusów.

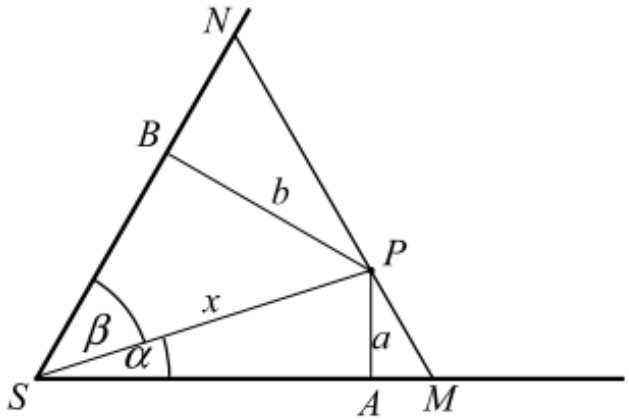
Twierdzenie Stewarta. Jeżeli punkt D leży na boku BC trójkąta ABC i dzieli ten bok na odcinki o długościach $BD = x$ i $DC = y$ oraz $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ i $AD = d$,



to

$$d^2a = b^2x + c^2y - axy\,.$$

Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.



W naszym trójkącie MNS mamy więc

$$SP^2 \cdot MN = MS^2 \cdot NP + NS^2 \cdot MP - MN \cdot MP \cdot NP .$$

Trójkąt jest równoboczny, więc obie strony tej równości możemy podzielić przez $MN = MS = NS$. Wtedy otrzymujemy

$$SP^2 = MS \cdot NP + NS \cdot MP - MP \cdot NP ,$$

czyli

$$x^2 = \frac{2a+2b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2b}{\sqrt{3}} + \frac{2a+2b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} - \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2b}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\left((a+b)b + (a+b)a - ab\right) = ,$$

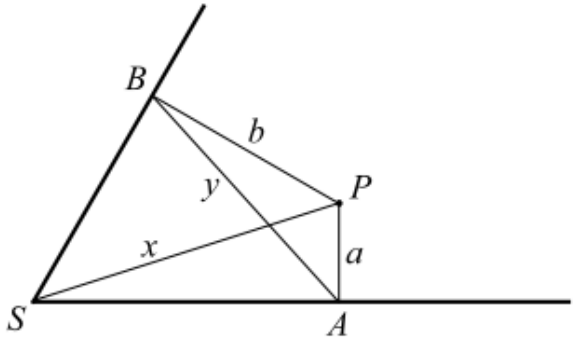
$$= \frac{4}{3}\left((a+b)^2 - ab\right) = \frac{4}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right),$$

skąd $x = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2 + ab + b^2}$, co należało wykazać.

Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

IV sposób rozwiązania

Poprowadźmy odcinek AB i przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Trójkąty PAS i PBS są prostokątne, więc $AS^2 = x^2 - a^2$ oraz $BS^2 = x^2 - b^2$. Kąty PSA i PSB tych trójkątów sumują $60°$, więc kąty SPA i SPB sumując się do $180° - 60° = 120°$.

Z twierdzenia cosinusów w trójkącie APB otrzymujmy

$$y^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120° = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 120° = a^2 + b^2 - 2ab\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= a^2 + ab + b^2,$$

a z twierdzenia cosinusów w trójkącie ASB otrzymujmy

$$y^2 = AS^2 + BS^2 - 2AS \cdot BS\cos 60° = x^2 - a^2 + x^2 - b^2 - 2\sqrt{x^2 - a^2} \cdot \sqrt{x^2 - b^2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= 2x^2 - a^2 - b^2 - \sqrt{x^2 - a^2} \cdot \sqrt{x^2 - b^2}.$$

Przyrównując prawe stron otrzymanych równości dostajemy

$$2x^2 - a^2 - b^2 - \sqrt{x^2 - a^2} \cdot \sqrt{x^2 - b^2} = a^2 + ab + b^2,$$

$$2x^2 - \sqrt{x^2 - a^2} \cdot \sqrt{x^2 - b^2} = 2a^2 + ab + 2b^2.$$

Po dosyć uciążliwych rachunkach otrzymujmy tezę.

Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

$$2x^2-\sqrt{x^2-a^2}\cdot\sqrt{x^2-b^2}=2a^2+ab+2b^2$$

$$2x^2-2a^2-ab-2b^2=\sqrt{x^2-a^2}\cdot\sqrt{x^2-b^2}$$

Podnosząc do kwadratu, otrzymujemy

$$4x^4-8a^2x^2-4abx^2-8b^2x^2+4a^4+4a^3b+9a^2b^2+4ab^3+4b^4=x^4-a^2x^2-b^2x^2+a^2b^2$$

$$3x^4-\left(7a^2+4ab+7b^2\right)x^2+4\left(a^4+a^3b+2a^2b^2+ab^3+b^4\right)=0,$$

$$x^4-\frac{7a^2+4ab+7b^2}{3}x^2+\frac{4\left(a^4+a^3b+2a^2b^2+ab^3+b^4\right)}{3}=0,$$

$$x^4-2\cdot\frac{7a^2+4ab+7b^2}{6}x^2+\left(\frac{7a^2+4ab+7b^2}{6}\right)^2+\frac{4\left(a^4+a^3b+2a^2b^2+ab^3+b^4\right)}{3}-\left(\frac{7a^2+4ab+7b^2}{6}\right)^2=0,$$

$$\left(x^2-\frac{7a^2+4ab+7b^2}{6}\right)^2-\left(\frac{\left(7a^2+4ab+7b^2\right)^{2\,2}}{36}-\frac{48\left(a^4+a^3b+2a^2b^2+ab^3+b^4\right)}{36}\right)=0,$$

$$\left(x^2-\frac{7a^2+4ab+7b^2}{6}\right)^2-\left(\frac{49a^4+56a^3b+114a^2b^2+56ab^3+49b^4}{36}-\frac{48a^4+48a^3b+96a^2b^2+48ab^3+48b^4}{36}\right)=0$$

$$(*)\qquad\left(x^2-\frac{7a^2+4ab+7b^2}{6}\right)^2-\frac{a^4+8a^3b+18a^2b^2+8ab^3+b^4}{36}=0.$$

Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Zauważmy teraz, że

$$a^4+8a^3b+18a^2b^2+8ab^3+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4+8a^3b+16a^2b^2+8ab^3=$$
$$=\left(a^2+b^2\right)^2+8ab\left(a^2+b^2\right)+16a^2b^2=\left(a^2+b^2\right)^2+2\cdot 4ab\left(a^2+b^2\right)+\left(4ab\right)^2=$$
$$=\left(a^2+b^2+4ab\right)^2$$

Zatem równość (*) możemy zapisać w postaci

$$\left(x^2-\frac{7a^2+4ab+7b^2}{6}\right)^2-\left(\frac{a^2+4ab+b^2}{6}\right)^2=0,$$
$$\left(x^2-\frac{7a^2+4ab+7b^2}{6}-\frac{a^2+4ab+b^2}{6}\right)\left(x^2-\frac{7a^2+4ab+7b^2}{6}+\frac{a^2+4ab+b^2}{6}\right)=0,$$
$$\left(x^2-\frac{8a^2+8ab+8b^2}{6}\right)\left(x^2-\left(a^2+b^2\right)\right)=0,$$
$$\left(x-\sqrt{\frac{4}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)}\right)\left(x+\sqrt{\frac{4}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)}\right)\left(x-\sqrt{a^2+b^2}\right)\left(x+\sqrt{a^2+b^2}\right)=0.$$

Drugi i czwarty czynnik są dodatnie, więc

$$x-\sqrt{\frac{4}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)}\ \text{ lub }\ x-\sqrt{a^2+b^2}=0,$$
$$x=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}\ \text{ lub }\ x=\sqrt{a^2+b^2}\ .$$

Druga z tych równości oznaczałaby, że $x^2=a^2+b^2$, co jest niemożliwe. Zatem

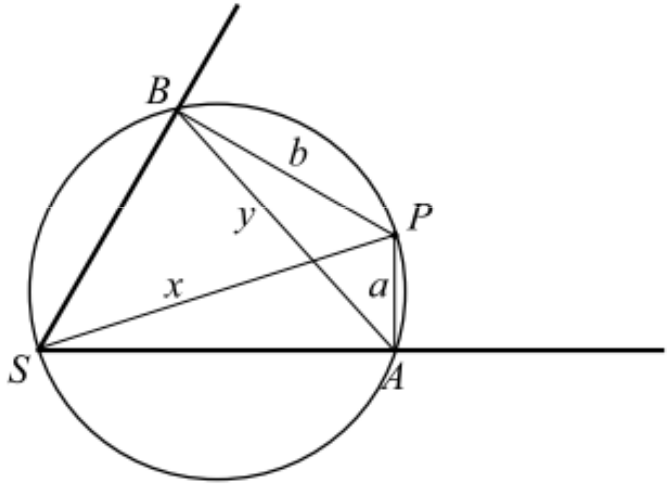
$$x=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}\ .$$

Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

V sposób rozwiązania

Tak jak w IV sposobie obliczamy $y=\sqrt{a^2+ab+b^2}$.

Zauważmy teraz, że skoro trójkąty PAS i PBS są prostokątne i ich wspólną przeciwprostokątną jest odcinek PS, to okrąg o średnicy PS jest opisany na każdym z tych trójkątów, a także na trójkącie ABS.



Z twierdzenia sinusów wynika, że $\frac{y}{\sin\sphericalangle ASB}=x$, czyli $\frac{\sqrt{a^2+ab+b^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=x$, skąd

$x=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}$, co kończy ten dowód.

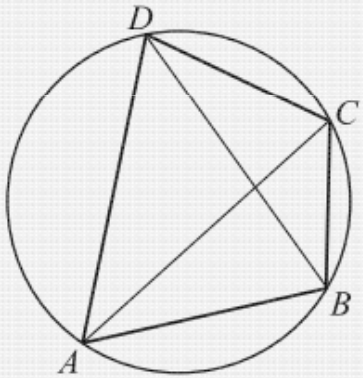
Zauważenie, że na czworokącie $SAPB$ można opisać okrąg równie otwiera przez nami nowe możliwości rozwiązania zadania. Pokażemy jedną z nich.

Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

VI sposób rozwiązania

Tak jak w poprzednim sposobie rozwiązania wykazujemy, że na czworokącie $SAPB$ można opisać okrąg. Wykorzystamy teraz twierdzenie Ptolemeusza.

Twierdzenie Ptolemeusza. Jeżeli na czworokącie można opisać okrąg, to iloczyn długości jego przekątnych równy jest sumie iloczynów długości przeciwległych boków tego czworokąta.



$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD .$$

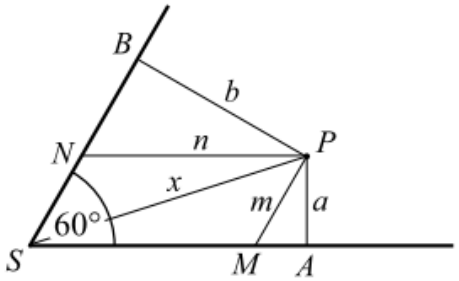
Po obliczeniu długości przekątnej AB (np. tak, jak w III sposobie rozwiązania) oraz długości boków $AS = \sqrt{x^2 - a^2}$ i $BS = \sqrt{x^2 - b^2}$, otrzymujemy z twierdzenia Ptolemeusza równanie

$$x\sqrt{a^2 + ab + b^2} = a\sqrt{x^2 - b^2} + b\sqrt{x^2 - a^2} ,$$

z którego wyznaczamy x.

VII sposób rozwiązania

Tym razem poprowadźmy odcinki MP i NP równoległe do ramion kąta, tak jak na rysunku. Długości tych odcinków oznaczmy literami m i n.



W ten sposób otrzymaliśmy równoległobok $SMPN$ o kącie ostrym $60°$, bokach długości m i n, którego przekątna SP ma długość x. Zauważmy, że a i b to wysokości tego równoległoboku. Zapiszmy jego pole na trzy sposoby

$$P_{SMPN} = n \cdot a = m \cdot b = m \cdot n \cdot \sin 60°,$$

czyli

$$n \cdot a = m \cdot b = m \cdot n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Z równości $n \cdot a = m \cdot n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $m \cdot b = m \cdot n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ wyznaczmy $m = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ oraz $n = \frac{2b}{\sqrt{3}}$.

Kąt SMP równoległoboku jest równy $120°$, więc z twierdzenia cosinusów w trójkącie SMP otrzymujemy

$$x^2 = \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2b}{\sqrt{3}} \cdot \cos 120° = \frac{4}{3}a^2 + \frac{4}{3}b^2 - 2 \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2b}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$$

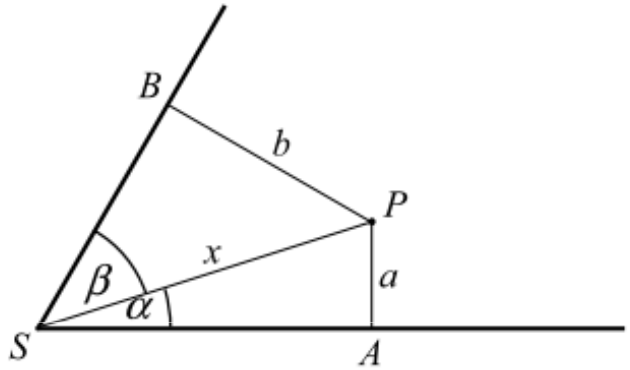
$$= \frac{4}{3}a^2 + \frac{4}{3}b^2 + \frac{4ab}{3} = \frac{4}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right).$$

Stąd $x = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2 + ab + b^2}$, co należało udowodnić.

Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

VIII sposób rozwiązania

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wówczas

$$\sin\alpha=\frac{a}{x},\ \sin\beta=\frac{b}{x}\ \text{oraz}\ \alpha+\beta=60^\circ.$$

Obliczmy cosinus kąta $\alpha+\beta$.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}.$$

Kąty α i β są ostre, więc

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}\ \text{oraz}\ \cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{x}\right)^2}.$$

Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Stąd i z poprzedniej równości dostajemy

$$\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{b}{x}\right)^2}-\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{x}=\frac{1}{2},$$

$$\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}-\frac{b^2}{x^2}+\frac{a^2b^2}{x^4}}=\frac{1}{2}+\frac{ab}{x^2}.$$

Pozostaje tylko stąd obliczyć x. Podnosząc obie strony do kwadratu dostajemy kolejno:

$$1-\frac{a^2}{x^2}-\frac{b^2}{x^2}+\frac{a^2b^2}{x^4}=\frac{1}{4}+\frac{ab}{x^2}+\frac{a^2b^2}{x^4},$$

$$1-\frac{a^2}{x^2}-\frac{b^2}{x^2}=\frac{1}{4}+\frac{ab}{x^2},$$

$$\frac{3}{4}=\frac{a^2+ab+b^2}{x^2},$$

$$x^2=\frac{4}{3}\left(a^2+ab+b^2\right),$$

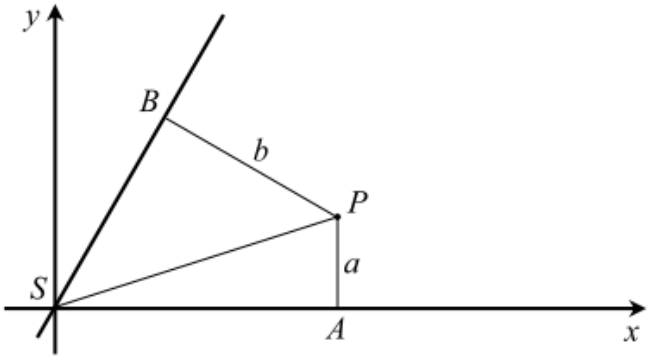
$$x=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}.$$

To kończy dowód.

Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

IX sposób rozwiązania

Umieśćmy kąt w układzie współrzędnych tak, jak na rysunku.



Wtedy $S=(0,0)$, $P=(x_A,a)$, gdzie $x_A>0$ i $A=(x_A,0)$. Ramię SB jest zawarte w prostej nachylonej do osi Ox pod kątem 60°, więc współczynnik kierunkowy tej prostej jest równy $\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}$. Zatem jej równanie ma postać $y=\sqrt{3}x$, czyli $\sqrt{3}x-y=0$.

Odległość punktu P od prostej SB jest równa

$$\frac{\left|\sqrt{3}x_A-a\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2}\left|\sqrt{3}x_A-a\right|=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x_A-a\right),$$

gdyż punkt P leży poniżej prostej SB.

Zatem $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x_A-a\right)=b$, skąd $x_A=\frac{a+2b}{\sqrt{3}}$, czyli $A=\left(\frac{a+2b}{\sqrt{3}},0\right)$.

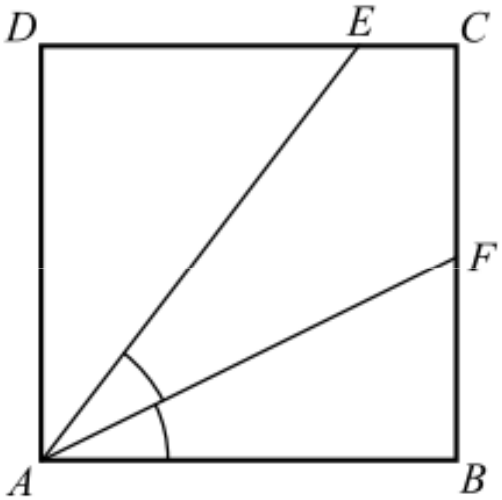
Ze wzoru na długość odcinka otrzymujemy

$$SP=\sqrt{\left(\frac{a+2b}{\sqrt{3}}\right)^2+a^2}=\sqrt{\frac{a^2+4ab+4b^2+3a^2}{3}}=\sqrt{\frac{4a^2+4ab+4b^2}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}\ .$$

To kończy dowód.

Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

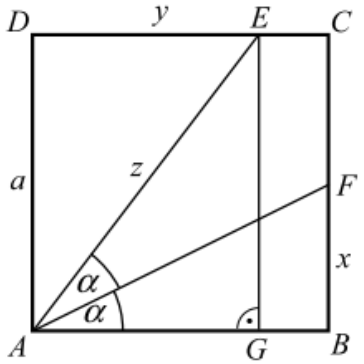
Zadanie 2. Na boku CD kwadratu $ABCD$ leży punkt E. Dwusieczna kąta BAE przecina bok BC tego kwadratu w punkcie F (zobacz rysunek).



Udowodnij, że $AE = BF + DE$.

I sposób rozwiązania

Poprowadźmy odcinek EG prostopadły do boku AB. Niech $AD = a$, $AE = z$, $BF = x$, $DE = y$ oraz $\sphericalangle BAF = \sphericalangle EAF = \alpha$. Pokażemy więc, że $x + y = z$.



Z trójkąta AEG otrzymujemy $\operatorname{tg}\sphericalangle GAE = \frac{EG}{AG}$, czyli $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{a}{y}$.

Z trójkąta ABF otrzymujemy natomiast $\operatorname{tg}\sphericalangle BAF = \frac{BF}{AB}$, czyli $\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{a}$.

Ze wzoru na tangens podwojonego kąta i otrzymanych równości mamy

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{a}{y},$$

$$\frac{2\cdot\frac{x}{a}}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{a}{y},$$

$$\frac{2ax}{a^2-x^2} = \frac{a}{y},$$

$$2xy = a^2 - x^2.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADE otrzymujemy $a^2 = z^2 - y^2$, więc

$$2xy = z^2 - y^2 - x^2,$$

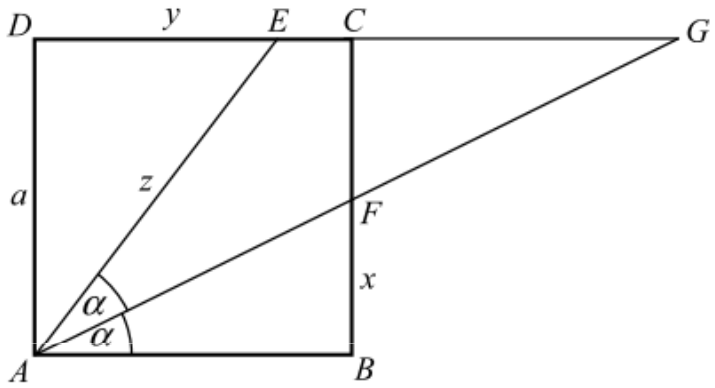
$$x^2 + 2xy + y^2 = z^2,$$

$$(x+y)^2 = z^2.$$

Stąd $x + y = z$, co należało udowodnić.

II sposób rozwiązania

Przedłużmy odcinek AF do przecięcia z prostą DC i punkt tego przecięcia oznaczmy literą G. Pozostałe oznaczenia przyjmijmy takie, jak w poprzednim sposobie rozwiązania ($AD = a$, $AE = z$, $BF = x$, $DE = y$, $\sphericalangle BAF = \sphericalangle EAF = \alpha$).



Proste AB i DC są równoległe, więc kąty BAF i CGF są równe, czyli $\sphericalangle CGF = \sphericalangle BAF = \alpha$. To oznacza, że trójkąt AGE jest równoramienny. Zatem $EG = AE = z$. Stąd wynika, że

$$DG = DE + EG = y + z .$$

Trójkąty ABF i GDA są podobne (oba są prostokątne i $\sphericalangle CGF = \sphericalangle BAF = \alpha$), więc

$$\frac{DG}{AD} = \frac{AB}{BF}, \text{ czyli } \frac{y+z}{a} = \frac{a}{x}.$$

Stąd otrzymujemy $a^2 = x(y+z)$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADE wynika natomiast, że $a^2 = z^2 - y^2$, więc

$$z^2 - y^2 = x(y+z),$$

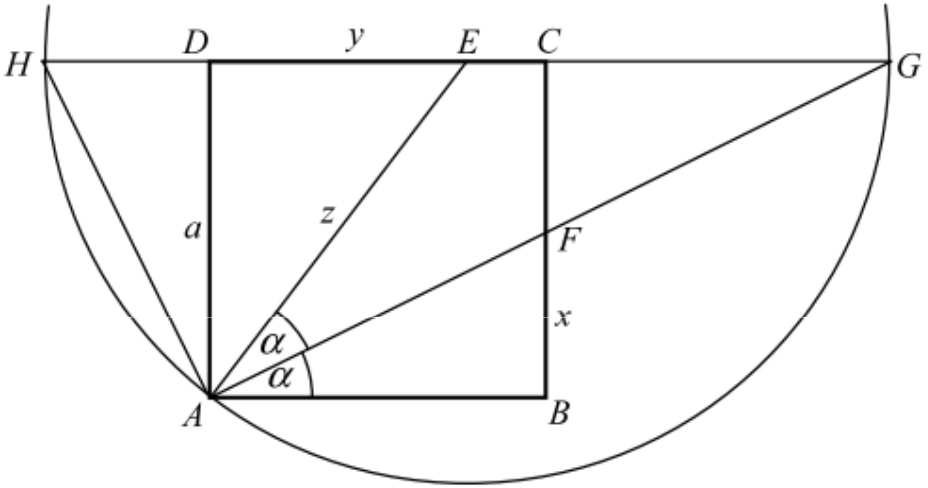
$$(z-y)(z+y) = x(y+z).$$

Dzieląc obie strony tej równości przez $y+z$ otrzymujemy tezę.

Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

III sposób rozwiązania

Przedłużmy odcinek AF do przecięcia z prostą DC w punkcie G oraz narysujmy odcinek AH prostopadły do odcinka AG tak, żeby jego koniec H leżał na prostej DC. Pozostałe oznaczenia przyjmijmy takie, jak poprzednio.



Jak w poprzednim sposobie rozwiązania zauważamy, że kąty BAF i CGF są równe, bo proste AB i DC są równoległe, czyli $\sphericalangle CGF = \sphericalangle BAF = \alpha$ oraz wnioskujemy stąd, że trójkąt AGE jest równoramienny. Zatem $EG = AE = z$. Trójkąt GAH jest prostokątny, $EG = AE = z$, więc punkt E jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, a odcinek GH jest jego średnicą. Zatem

$$HE = AE = GE = z.$$

Ponadto kąt ostry przy wierzchołku H tego trójkąta jest równy $90^\circ - \alpha$ (bo drugi kąt ostry AGH to α). To z kolei oznacza, że kąt ostry DAH w trójkącie prostokątnym ADH jest równy α. Stąd wnioskujemy, że trójkąty ADH i ABF są przystające, bo (oprócz równości odpowiednich kątów) ich przyprostokątne AD i AB są równe. Zatem $HD = BF = x$, więc

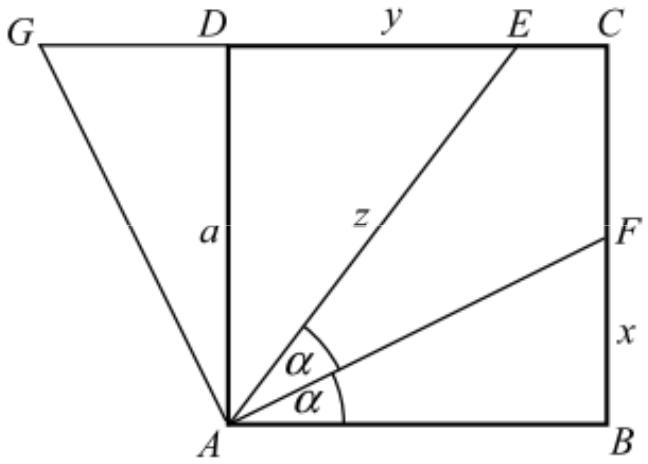
$$z = AE = HD + DE = x + y.$$

To należało udowodnić.

Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

IV sposób rozwiązania

Przyjmijmy te same oznaczenia, jak w poprzednich dwóch sposobach rozwiązania i na prostej DC wybierzmy taki punkt G nie leżący na odcinku CD, żeby $GD = BF = x$. Poprowadźmy też odcinek AG.

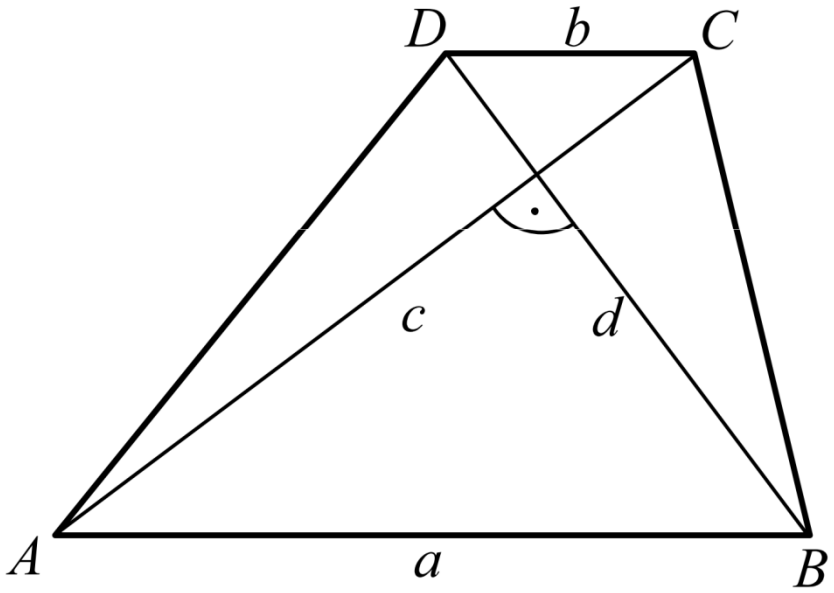


Trójkąty ABF i ADG są zatem przystające (oba są prostokątne, $GD = BF = x$, $AD = AB = a$). Stąd $\sphericalangle GAD = \alpha$ oraz $\sphericalangle AGD = 90^\circ - \alpha$.

Zauważmy teraz, że $\sphericalangle GAE = \sphericalangle GAD + \sphericalangle DAE = \alpha + (90^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha$. To z kolei oznacza, że trójkąt AEG jest równoramienny a jego ramiona to AE i GE. Zatem $AE = GE$, czyli $z = x + y$, co właśnie należało udowodnić.

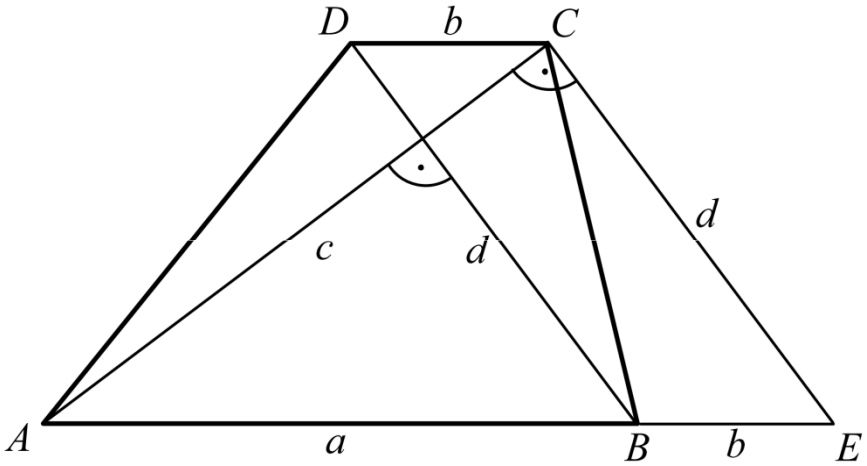
Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Zadanie 3. Wykaż, że jeżeli trapez ma prostopadłe przekątne, to suma kwadratów długości tych przekątnych jest równa kwadratowi sumy długości jego podstaw.



I sposób rozwiązania

Niech c i d oznaczają tym razem długości przekątnych trapezu oraz a i b, podobnie jak poprzednio, długości jego podstaw. Poprowadźmy odcinek CE równoległy do BD tak, żeby koniec E tego odcinka leżał na prostej AB, jak na rysunku.



Wówczas czworokąt $BECD$ jest równoległobokiem. Zatem $CE = d$ i $BE = b$. Ponieważ AC i BD są prostopadłe, BD i CE są równoległe, więc AC i CE są prostopadłe. To oznacza, że trójkąt ACE jest prostokątny. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy zatem

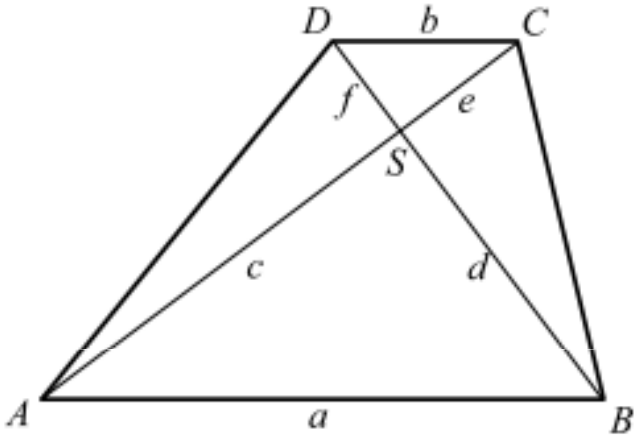
$$AC^2 + CE^2 = AE^2, \text{ czyli } c^2 + d^2 = (a+b)^2,$$

co właśnie należało udowodnić.

Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

II sposób rozwiązania

Przyjmijmy oznaczenia takie, jak na rysunku.



Wówczas teza ma postać $(c+e)^2+(d+f)^2=(a+b)^2$, a po rozwinięciu nawiasów

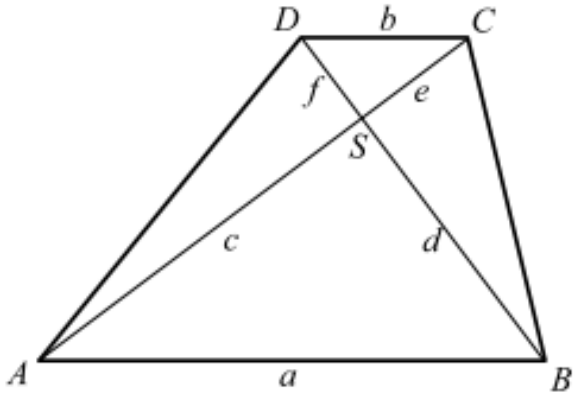
$$c^2+2ce+e^2+d^2+2df+f^2=a^2+2ab+b^2.$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkątach ABS i CDS otrzymujemy $a^2=c^2+d^2$ oraz $b^2=e^2+f^2$, więc równość, jaką mamy udowodnić możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\left(c^2+d^2\right)+2ce+2df+\left(e^2+f^2\right)=a^2+2ab+b^2,$$

$$a^2+2\left(ce+df\right)+b^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$ce+df=ab.$$



Trójkąty ABS i CDS są podobne, gdyż kąty BAS i DCS są równe, podobnie jak kąty ABS i CDS, jako kąty naprzemianległe wyznaczone przez dwie proste równoległe. Zatem

$$\frac{c}{a}=\frac{e}{b} \text{ oraz } \frac{d}{a}=\frac{f}{b},$$

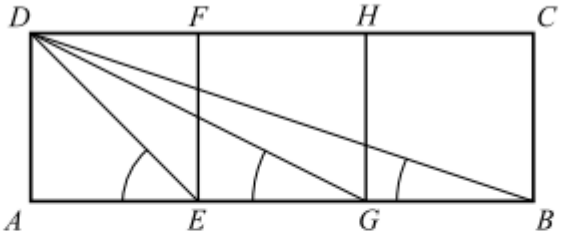
skąd $c=\frac{a}{b}\cdot e$ oraz $d=\frac{a}{b}\cdot f$. Wobec tego równość $ce+df=ab$ jest równoważna równości

$$\frac{a}{b}\cdot e^2+\frac{a}{b}\cdot f^2=ab,$$

$$\frac{a}{b}\cdot\left(e^2+f^2\right)=ab.$$

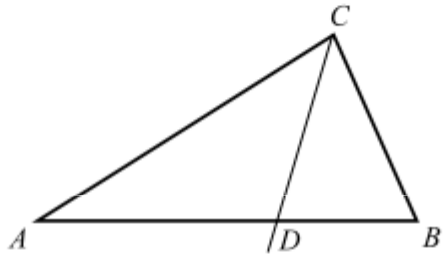
Wcześniej już zauważyliśmy, że $b^2=e^2+f^2$, więc $\frac{a}{b}\cdot b^2=ab$, czyli $ab=ab$, co jest oczywiście prawdą.

Zadanie 4. Prostokąt $ABCD$ jest złożony z trzech kwadratów: $AEFD$, $EGHF$ i $GBCH$ tak, jak na rysunku.



Uzasadnij, że $\sphericalangle AED + \sphericalangle AGD + \sphericalangle ABD = 90°$.

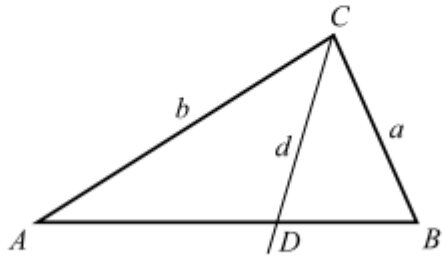
Zadanie 5. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB tego trójkąta w punkcie D (zobacz rysunek).



Wykaż, że $\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC}$.

Jest to twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta.

Zadanie 6. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB tego trójkąta w punkcie D. Oznaczmy długości odcinków AC, BC i DC odpowiednio b, a, d (zobacz rysunek).



Wykaż, że $d < \frac{2ab}{a+b}$.

Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Dziękuję za uwagę