Opracowanie Ewa Radczyc

Klasa I LO i Technikum (po szkole podstawowej)

Temat: Funkcja kwadratowa – zastosowanie. (2godz.)

Cele lekcji, uczeń:
- analizuje treść zadania;
- zapisuje wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej, wyznacza dziedzinę;
- zamienia postać iloczynową funkcji kwadratowej na postać kanoniczną i ogólna;
- wyznacza współrzędne wierzchołka, miejsca zerowe, punkt przecięcia z osią 0Y;
- rysuje wykres, interpretuje rozwiązanie zadania na podstawie wykresu.

Przebieg lekcji:

1. Analiza przykładów:

Przykład 1.

Dany jest prostokąt o bokach długości 1 i 6. Krótszy bok danego prostokąta wydłużamy o x, a dłuższy bok skracamy o x. Powstaje nowy prostokąt o wymiarach $1+x$, $6-x$.

a) Obliczymy pole nowego prostokąta w przypadku, gdy x przyjmuje kolejno wartości: 0,5; 2; 4; 5.

b) Wyznaczymy funkcję pola P nowego prostokąta w zależności od zmiennej x i ustalimy jej dziedzinę.

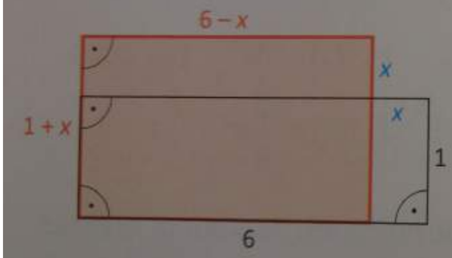
c) Naszkicujemy wykres funkcji P.

d) Wyznaczymy największe pole, jakie może mieć nowy prostokąt, i ustalimy, jakie wówczas są długości boków nowego prostokąta.

Ad a) W zależności od różnych wartości x, wymiary nowego prostokąta są różne. Pole prostokąta też przyjmuje różne wielkości. Wyniki przedstawione są w poniższej tabeli.

x	$1+x$	$6-x$	pole nowego prostokąta
0,5	1,5	5,5	8,25
2	3	4	12
4	5	2	10
5	6	1	6

Ad b)



Boki nowego prostokąta mają długość:

$$(1+x) \text{ oraz } (6-x).$$

Liczba x jest dodatnia (krótszy bok danego prostokąta wydłużamy, a nie skracamy), a także mniejsza od 6 (bo $6-x>0$).

Pole nowego prostokąta jest funkcją zmiennej x:

$$P(x)=(x+1)(6-x), \text{ gdzie } x\in(0,6).$$

Ad c) Wykres funkcji P jest fragmentem wykresu funkcji kwadratowej $f(x)=(x+1)(6-x)$, określonej w zbiorze $\mathbf{R}$. Znajdujemy współrzędne (p, q) wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji f. Możemy skorzystać ze wzoru

$p=\frac{x_1+x_2}{2}$, gdzie x_1, x_2 są miejscami zerowymi funkcji f.

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby -1 i 6 (sprawdź!), zatem:

$$p=\frac{-1+6}{2}=2\frac{1}{2} \qquad q=f\left(2\frac{1}{2}\right)=\left(2\frac{1}{2}+1\right)\left(6-2\frac{1}{2}\right)=\left(3\frac{1}{2}\right)^2=12\frac{1}{4}$$

Ad d) Z wykresu funkcji P odczytujemy, że pole nowego prostokąta jest największe wtedy, gdy $x=2\frac{1}{2}$. Wówczas nowy prostokąt jest kwadratem o boku mającym długość $3\frac{1}{2}$, a jego pole jest równe $12\frac{1}{4}$.

Przykład 2.

Przykład 2.

Z punktu $h_0=125$ m nad powierzchnią ziemi upuszczono kamień.

Funkcja $h(t)=h_0-\frac{gt^2}{2}$ opisuje odległość kamienia od ziemi po t sekundach spadania ($t>0$); g oznacza przyspieszenie ziemskie, $g\approx 10$ m/s^2.

a) Obliczymy:
- na jakiej wysokości od ziemi będzie kamień po 1 sekundzie spadania?
- po ilu sekundach (od momentu upuszczenia) kamień będzie na wysokości 80 m od powierzchni ziemi?
- po ilu sekundach kamień spadnie na ziemię?

b) Naszkicujemy wykres funkcji h.

Ad a) Uwzględniając warunki zadania, otrzymujemy:

$h(t) = 125 - 5t^2$ zatem

$h(1) = 125 - 5 \cdot 1^2 = 120$

Kamień będzie na wysokości 120 m po 1 sekundzie spadania.

Obliczamy, po ilu sekundach spadania kamień będzie 80 m nad ziemią.

$$h(t) = 80 \Leftrightarrow 125 - 5t^2 = 80$$

$$5t^2 = 45 \quad /:\ 5$$

$$t^2 = 9$$

$$t = 3 \text{ lub } t = -3,\ -3 < 0$$

Po 3 sekundach kamień będzie na wysokości 80 m.

Gdy kamień spadnie na ziemię, to jego odległość od ziemi będzie równa zero.

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow 125 - 5t^2 = 0$$

$$5t^2 = 125 \quad /:\ 5$$

$$t^2 = 25$$

$$t = 5 \text{ lub } t = -5,\ -5 < 0$$

Kamień spadnie na ziemię po 5 sekundach.

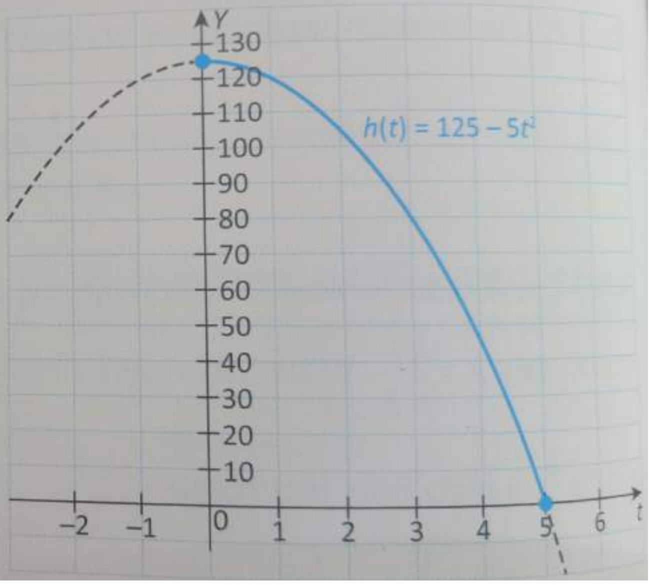
Ad b)

Wykresem funkcji

$h(t) = 125 - 5t^2,\ t \in \langle 0, 5 \rangle$

jest część paraboli, której wierzchołek znajduje się w punkcie $(0, 125)$ i do której należą punkty $(-5, 0)$ i $(5, 0)$.

Aby wygodniej było naszkicować wykres, zastosowaliśmy różne skale na osiach układu współrzędnych.



Przykład 3.

Przykład 3.

Z wysokości $h_0 = 15$ m wystrzelono pionowo do góry piłeczkę kauczukową z prędkością początkową $v = 10$ m/s. Funkcja $h(t) = h_0 + vt - \frac{gt^2}{2}$, ($g \approx 10$ m/s^2) wyznacza odległość $h(t)$ piłeczki od ziemi, po t sekundach lotu $(t > 0)$.

a) Odpowiemy na pytania:
   - Po jakim czasie piłeczka spadnie na ziemię?
   - Na jaką maksymalną wysokość wzniesie się piłeczka?
   - W jakim czasie odległość piłeczki od ziemi będzie rosła, a w jakim będzie malała?
   - Po jakim czasie piłeczka będzie znów na wysokości 15 m?

b) Naszkicujemy wykres funkcji h.

Ad a) Z danych zadania wynika, że wzór funkcji h jest następujący:

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 15$$

Zapisujemy wzór funkcji h w postaci kanonicznej:

$$-5t^2 + 10t + 15 = -5(t^2 - 2t) + 15 = -5(t^2 - 2 \cdot t \cdot 1 + 1^2 - 1^2) + 15 =$$
$$= -5[(t-1)^2 - 1] + 15 = -5(t-1)^2 + 20$$

czyli

$$h(t) = -5(t-1)^2 + 20$$

Określimy dziedzinę funkcji h. W tym celu wyznaczymy czas, po którym piłeczka spadła na ziemię.

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow -5(t-1)^2 + 20 = 0$$
$$(t-1)^2 = 4$$
$$t - 1 = 2 \text{ lub } t - 1 = -2$$
$$t = 3 \quad \text{lub} \quad t = -1, \quad -1 < 0$$

Piłeczka poruszała się przez 3 sekundy, więc

$$D_h = \langle 0, 3 \rangle.$$

Ze wzoru funkcji h w postaci kanonicznej $h(t) = -5(t-1)^2 + 20$ wynika natychmiast, że maksymalna wysokość, na jaką wzniosła się piłeczka, to 20 m. Ta wysokość była osiągnięta po 1 sekundzie lotu ($h(1) = 20$). W czasie $t \in \langle 0, 1 \rangle$ odległość piłeczki od ziemi rosła, a w czasie $t \in \langle 1, 3 \rangle$ odległość piłeczki od ziemi malała. Aby wyznaczyć czas, po którym piłeczka była znów na wysokości 15 m, rozwiążemy równanie $h(t) = 15$. Posłużymy się wzorem funkcji h w postaci kanonicznej, ale w tym przypadku można też wykorzystać wzór w postaci ogólnej – sprawdź to!

$$h(t) = 15 \Leftrightarrow -5(t-1)^2 + 20 = 15$$
$$(t-1)^2 = 1$$
$$t - 1 = 1 \text{ lub } t - 1 = -1$$
$$t = 2 \quad \text{lub} \quad t = 0$$

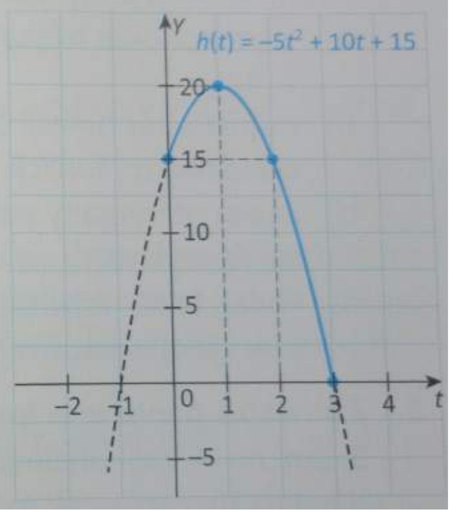
Po 2 sekundach piłeczka była ponownie na wysokości 15 m nad ziemią.

Ad b) Wykresem funkcji

$$h(t) = -5(t-1)^2 + 20, \quad t \in \langle 0, 3 \rangle$$

jest część paraboli, której wierzchołkiem jest punkt $(1, 20)$, osią symetrii prosta o równaniu $t = 1$, i do której należą punkty

$$(0, 15), (2, 15), (3, 0).$$



Przykład 4.

Przykład 4.

Pewien rzemieślnik produkuje ozdobne okucia, które sprzedaje producentom drzwi. Comiesięczny dochód rzemieślnika (w zł) w zależności od liczby n sprzedanych okuć opisuje funkcja $f(n) = n^2 + 40n - 1200$, $n \in \mathbf{N}$. Ile okuć musi sprzedać rzemieślnik, aby:

a) pokryć stałe koszty comiesięcznej działalności,

b) uzyskać dochód w wysokości 6500 zł?

Zapisujemy wzór funkcji f w postaci kanonicznej:

$$n^2 + 40n - 1200 = (n^2 + 2 \cdot n \cdot 20 + 20^2 - 20^2) - 1200 = (n+20)^2 - 1600 \text{ , więc}$$

$$f(n) = (n+20)^2 - 1600, \quad n \in \mathbf{N}$$

Ad a) Zauważ, że jeśli rzemieślnik nie sprzeda żadnego okucia lub sprzeda ich bardzo mało, jego dochód będzie ujemny (mówiąc inaczej, będzie miał stratę), na przykład, $f(0) = -1200$, $f(10) = -700$. Aby ustalić, ile okuć musi sprzedać rzemieślnik, aby pokryć stałe koszty swej działalności, wystarczy rozwiązać równanie $f(n) = 0$.

$$f(n) = 0 \Leftrightarrow (n+20)^2 - 1600 = 0$$

$$(n+20)^2 = 1600$$

$$n + 20 = 40 \text{ lub } n + 20 = -40$$

$$n = 20 \text{ lub } n = -60, \ -60 < 0$$

Aby pokryć stałe koszty, rzemieślnik musi sprzedać 20 okuć.

Ad b) Rozwiązujemy równanie $f(n) = 6500$:

$$f(n) = 6500 \Leftrightarrow (n+20)^2 - 1600 = 6500$$

$$(n+20)^2 = 8100$$

$$n + 20 = 90 \text{ lub } n + 20 = -90$$

$$n = 70 \text{ lub } n = -110, \ -110 < 0$$

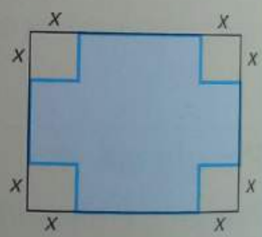
Aby uzyskać dochód w wysokości 6500 zł, rzemieślnik powinien sprzedać 70 okuć.

3. Sprawdź stopień opanowania wiadomości i umiejętności rozwiązując następujące zadania: Powodzenia:)

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Dany jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długość 8 cm i 2 cm. Krótszą przyprostokątną wydłużamy o x cm, a dłuższą skracamy o x cm.
   a) Wyznacz pole trójkąta w przypadku, gdy x przyjmuje kolejno wartości: 1, 2, 4, 6.
   b) Napisz wzór funkcji opisującej pole tego trójkąta w zależności od x i podaj dziedzinę tej funkcji.
   c) Zapisz otrzymany wzór funkcji w postaci kanonicznej, a następnie naszkicuj jej wykres.
   d) Podaj, jakie największe pole może mieć trójkąt po zmianie długości boków i jaką wartość ma wówczas x.

2. Z kawałka papieru w kształcie prostokąta o wymiarach 5 cm na 4 cm odcinamy cztery kwadratowe naroża o boku długości x, jak na rysunku obok.



   a) Oblicz pole figury pozostałej po odcięciu tych naroży (kolor niebieski), jeśli x przyjmuje kolejno wartość: 0,5 cm; 1 cm; 2 cm.
   b) Napisz wzór funkcji opisującej pole tej figury w zależności od x i podaj jej dziedzinę.
   c) Naszkicuj wykres otrzymanej funkcji.
   d) Czy otrzymana funkcja przyjmuje wartość najmniejszą? Jeśli tak, to dla jakiego argumentu jest ona przyjmowana?

3. Podstawa danego trójkąta ma długość 10, zaś wysokość poprowadzona na tę podstawę jest równa 4.
   a) Podaj wzór funkcji opisującej pole trójkąta w przypadku, gdy podstawę danego trójkąta skrócimy o x, zaś wysokość wydłużymy o x. Wyznacz dziedzinę tej funkcji.
   b) Oblicz wartość x, dla której pole nowego trójkąta jest równe 12.
   c) Uzasadnij, że funkcja pola przyjmuje wartość największą. Podaj największe możliwe pole, jakie może mieć nowy trójkąt powstały w wyniku zmiany długości podstawy i wysokości danego trójkąta.
4. Z wysokości H nad ziemią upuszczono kamień, który po 2 sekundach spadania przebył $\frac{1}{4}$ wysokości. Wiedząc, że odległość (w metrach) kamienia od ziemi opisuje wzór funkcji $h(t) = H - 5t^2$, oblicz:
   a) wysokość H;
   b) po ilu sekundach spadania kamień dotknął ziemi.

   Pomijamy opory powietrza.
5. Piłkarz kopnął piłkę, która poszybowała pionowo do góry z prędkością początkową v. Odległość (w metrach) piłki od ziemi opisuje funkcja $h(t) = vt - 5t^2$. Wiedząc, że piłka spadła na ziemię po 6 sekundach lotu, oblicz:
   a) prędkość początkową piłki;
   b) największą odległość piłki od ziemi;
   c) po ilu sekundach od chwili kopnięcia piłka była na wysokości 25 metrów nad ziemią.

   Pomijamy opory powietrza.
6. Stolarz zajmuje się produkcją ozdobnych szkatułek drewnianych na biżuterię, które sprzedaje do hurtowni. Miesięczny dochód stolarza (w zł) opisuje funkcja $d(n) = n^2 + 20n - 2400$, gdzie n oznacza liczbę sprzedanych szkatułek w ciągu jednego miesiąca. Oblicz:
   a) ile, co najmniej, szkatułek musi sprzedać stolarz, aby działalność nie przynosiła strat;
   b) miesięczny dochód stolarza, wiedząc, że w ciągu miesiąca sprzedał 70 szkatułek;
   c) ile szkatułek co miesiąc powinien sprzedawać, aby miesięczny dochód był równy 5600 zł.
7. „Bawiły się raz małpy – wieść indyjska niesie –
   Ósma ich część w kwadracie już skacze po lesie,
   Pozostałych dwanaście w pląsach i z wrzaskami
   Pomiędzy zielonymi hasa pagórkami.
   Ileż ich wszystkich było? – pyta się Bhâskara
   Zagadka nie jest trudna, chociaż bardzo stara."