

Suma n - początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.



Ewa Radczyc
ODN Zielona Góra

Wstęp

Przedstawiam Państwu propozycję lekcji dla uczniów klas 2 LO i Technikum.

Przewidziany czas realizacji 2 - 3godz. lekcyjne.

Na prezentacji ukazują się poszczególne etapy rozwiązywania zadania, aby ułatwić uczniom zrozumienie tematu.

Suma n - początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) określona jest wzorem:

$$r = a_{n+1} - a_n$$

wzór na różnicę ciągu arytmetycznego

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$$

wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.
Modyfikacja drugiego wzoru. W miejsce a_n wstawiono
 $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

ćwiczenia

Ewa Radczyc - doradca
metodyczny

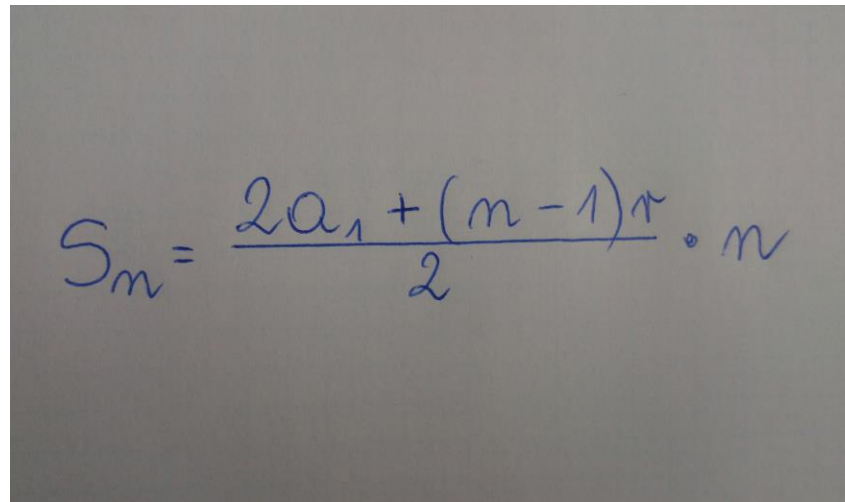
Ćw.1. Oblicz sumę pięćdziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) , w którym $a_1 = -49$ i $r = 2$.

$$a_1 = -49$$

$$r = 2$$

$$n = 50$$

$$S_{50} = \frac{1}{2} \cdot (-49) + (50 - 1) \cdot 2 = 0$$


$$S_m = \frac{2a_1 + (m-1)r}{2} \cdot m$$

Ćw.2. Rowerzysta w ciągu pierwszej godziny przejechał 18km, a w ciągu każdej następnej odcinek o 0,8km krótszy od poprzedniego. W ciągu ostatniej godziny przejechał 14km.

a) Ile czasu trwała podróż?

$$a_1 = 18$$

$$a_n = 14$$

$$r = -0,8$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$14 = 18 + (n - 1) \cdot (-0,8)$$

$$14 = 18 - 0,8n + 0,8$$

$$-4,8 = -0,8n$$

$$n = 6$$

Odp.: 6 godzin

b) Ile kilometrów przejechał rowerzysta?

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot (18 + 14) \cdot 6$$

$$S_n = 96$$

lub

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot [2 \cdot 18 + 5 \cdot (-0,8)] \cdot 6$$

$$S_n = 96$$

$$S_m = \frac{a_1 + a_m}{2} \cdot n$$

$$S_m = \frac{2a_1 + (m-1)r}{2} \cdot n$$

Ćw.3. Oblicz sumę liczb naturalnych

dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez:

a) 5 dają resztę 4

$$a_n = 5n + 4$$

$$a_1 = 14, r = 5, a_n = 99$$

$$99 = 14 + (n - 1) \cdot 5$$

$$99 = 14 + 5n - 5$$

$$n = 18$$

$$S_{18} = \frac{1}{2} [2 \cdot 14 + (18 - 1) \cdot 5] \cdot 18$$

$$S_{18} = 1017$$

lub

$$S_{18} = \frac{1}{2}(14 + 99) \cdot 18$$

$$S_{18} = 1017$$

b) 7 dają resztę 1

$$a_n = 7n + 1$$

$$a_1 = 15, r = 7, a_n = 99$$

$$99 = 15 + (n - 1) \cdot 7$$

$$99 = 15 + 7n - 7$$

$$n = 13$$

$$S_{13} = \frac{1}{2} [2 \cdot 15 + (13 - 1) \cdot 7] \cdot 13$$

$$S_{13} = 741$$

lub

$$S_{13} = \frac{1}{2}(15 + 99) \cdot 13$$

$$S_{13} = 741$$

Ćw. 4. Wyznacz wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) , którego suma n początkowych wyrazów określona jest wzorem:

$$a) S_n = n^2$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$a_n = n^2 - (n - 1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = n^2 - n^2 + 2n - 1 = 2n - 1$$

$$b) S_n = n^2 + 2n$$

$$a_n = n^2 + 2n - [(n - 1)^2 + 2(n - 1)] = n^2 + 2n - (n^2 - 2n + 1 + 2n - 2) = n^2 + 2n - n^2 - 1 + 2 = 2n + 1$$

Ćw.5. Wyraż w zależności od n sumę $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2)$.
Oblicz, ile składników ma suma $1 + 4 + 7 + \dots + 1045$.

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$1) a_1 = 1, r = 3$$

$$a_n = 3n - 2$$

$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 3$$

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot [2 \cdot 1 + (n - 1) \cdot 3] \cdot n$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2 + 3n - 3) \cdot n =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (3n - 1) \cdot n$$

$$S_n = (3n^2 - n) \cdot \frac{1}{2}$$

$$2) a_1 = 1, r = 3$$

$$a_n = 1045$$

$$1045 = 1 + (n - 1) \cdot 3$$

$$1045 = 1 + 3n - 3$$

$$1047 = 3n$$

$$n = 349$$

Ćw.6. Rozwiąż równanie, którego lewa strona jest sumą kolejnych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego, gdy:

$$\text{a) } 1 + 2 + 3 + \dots + x = 78$$

$$a_1 = 1, a_n = x, r = 1$$

$$n \in \mathbb{N}^+, S_n = 78$$

$$78 = \frac{1}{2} \cdot [2 \cdot 1 + (n - 1) \cdot 1] \cdot n$$

$$78 = \frac{1}{2} \cdot (2 + n - 1) \cdot n$$

$$156 = n^2 + n$$

$$n^2 + n - 156 = 0$$

$$\Delta = 1^2 + 4 \cdot (-156)$$

$$\Delta = 625, \sqrt{\Delta} = 25$$

$$n_1 = -13 \text{ nie należy do } \mathbb{D}$$

$$n_2 = 12$$

$$a_{12} = x$$

$$a_{12} = 1 + 11 \cdot 1 = 12$$

$$\text{b) } 1 + 3 + 5 + \dots + x = 81$$

$$a_1 = 1, a_n = x, r = 2$$

$$n \in \mathbb{N}^+, S_n = 81$$

$$81 = \frac{1}{2} \cdot [2 \cdot 1 + (n - 1) \cdot 2] \cdot n$$

$$81 = \frac{1}{2} \cdot (2 + 2n - 2) \cdot n$$

$$81 = n^2$$

$$n_1 = -9 \text{ nie należy do } \mathbb{D}$$

$$n_2 = 9$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$a_9 = 1 + 8r$$

$$a_9 = 1 + 8 \cdot 2$$

$$a_9 = 17$$

zadania

Ewa Radczyc - doradca
metodyczny

Zad.1. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Oblicz:

a) $a_5 + a_{21} = ?$

$$a_{13} = -1, a_{13} = a_1 + 12r$$

$$\begin{aligned} a_5 + a_{21} &= a_1 + 4r + a_1 + 20r = 2a_1 + 24r = 2(a_1 + 12r) = \\ &= 2 \cdot (-1) = -2 \end{aligned}$$

b) $a_{14} + a_{20} + a_{10} + a_{24} = ?$,

$$a_{17} = \sqrt{2}, a_{17} = a_1 + 16r$$

$$\begin{aligned} a_{14} + a_{20} + a_{10} + a_{24} &= a_1 + 13r + a_1 + 19r + a_1 + 9r + a_1 + 23r \\ &= 4a_1 + 64r = 4(a_1 + 16r) = 4 \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

c) $a_{11} + a_{17} + a_{23} + a_{29} = ?$

$$a_{10} + a_{30} = 6$$

$$a_{10} + a_{30} = a_1 + 9r + a_1 + 29r = 2a_1 + 38r$$

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{17} + a_{23} + a_{29} &= a_1 + 10r + a_1 + 16r + a_1 + 22r + a_1 + \\ &+ 28r = 4a_1 + 76r = 2(a_1 + 38r) = 2 \cdot 6 = 12 \end{aligned}$$

Zad.2. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych:

a) podzielnych przez 3

$$a_1 = 102, a_n = 999, r = 3$$

$$999 = 102 + (n - 1) \cdot 3$$

$$999 = 102 + 3n - 3$$

$$900 = 3n$$

$$n = 300$$

$$S_{300} = ?$$

b) podzielnych przez 4

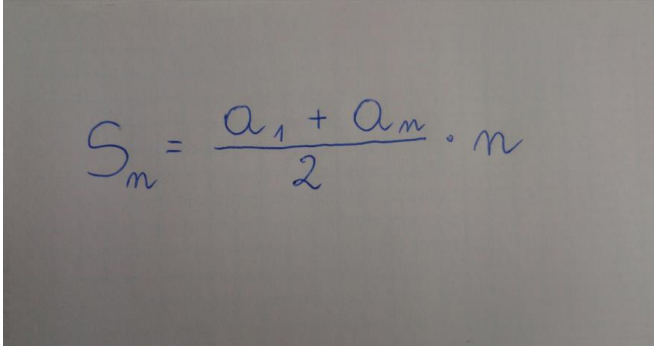
$$a_1 = 100, a_n = 999, r = 4$$

c) Podzielnych przez 12

$$a_1 = 108, a_n = 996, r = 12$$

d) Które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 4

$$a_1 = 102, a_n = 998, r = 7$$


$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Zad.3. Oblicz sumę wyrazów ciągu arytmetycznego:

a) $1 + 2 + 3 + \dots + 1000$

$a_1 = 1, a_n = 1000, r = 1$

$S_{1000} = ?$

b) $\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + \dots + 99\sqrt{2}$

$a_1 = \sqrt{2}, a_n = 99\sqrt{2}, r = 2\sqrt{2}$

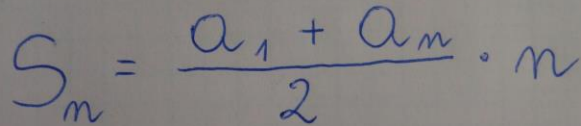
$99\sqrt{2} = \sqrt{2} + (n - 1) \cdot 2\sqrt{2}$

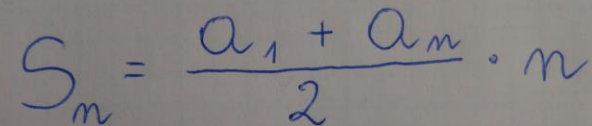
$99 = 1 + 2n - 2$

$100 = 2n$

$n = 50$

$S_{50} = ?$


$$S_m = \frac{a_1 + a_m}{2} \cdot n$$


$$S_m = \frac{a_1 + a_m}{2} \cdot n$$

Zad.4. Wyraż w zależności od n sumę:

$$a) 1 + 6 + 11 + \dots + (5n - 4)$$

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot [2 \cdot 1 + (n - 1) \cdot 5] \cdot n = \frac{1}{2} \cdot (2 + 5n - 5) \cdot n \\ n = \frac{1}{2} \cdot (5n - 3) \cdot n = \frac{1}{2} \cdot (5n^2 - 3n)$$

$$b) 3 + 8 + 13 + \dots + (5n - 2)$$

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot [2 \cdot 3 + (n - 1) \cdot 5] \cdot n = \frac{1}{2} \cdot (6 + 5n - 5) \cdot n \\ n = \frac{1}{2} \cdot (5n + 1) \cdot n = \frac{1}{2} \cdot (5n^2 + n)$$

Zad.5. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.
Oblicz:

a) $S_5 = ?$, $a_3 = 2$

$$a_1 = a_3 - 2r$$

$$a_2 = a_3 - r$$

$$a_4 = a_3 + r$$

$$a_5 = a_3 + 2r$$

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$S_5 = a_3 - 2r + a_3 - r + a_3 + a_3 + r + a_3 + 2r = 5a_3 = 10$$

b) $S_{23} = ?$, $a_{12} = 4$

$$a_1 = a_{12} - 11r$$

$$a_{23} = a_{12} + 11r$$

$$S_{23} = \frac{1}{2}(a_1 + a_{23}) \cdot 23$$

$$S_{23} = \frac{1}{2}(a_{12} - 11r + a_{12} + 11r) \cdot 23 = \frac{1}{2} \cdot 2a_{12} \cdot 23 = 4 \cdot 23 = 92$$

Zad.6. Wyznacz ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym:

$$\text{a) } a_1 = -200$$

$$S_{40} = -2540$$

$$-2540 = \frac{1}{2} \cdot [-200 \cdot 2 + 39r] \cdot 40$$

$$-2540 = (-400 + 39r) \cdot 20$$

$$-127 = -400 + 39r$$

$$273 = 39r$$

$$r = 7$$

$$a_n = -200 + 7(n - 1)$$

$$a_n = -200 + 7n - 7$$

$$a_n = 7n - 207$$

$$\text{b) } S_1 = 5 \quad S_2 = 8 \quad a_1 = 5$$

$$a_2 = S_2 - S_1$$

$$a_2 = 3$$

$$a_2 - a_1 = r$$

$$r = -2$$

$$a_n = 5 + (n - 1) \cdot (-2)$$

$$a_n = 5 - 2n + 2$$

$$a_n = 7n - 2n$$

Zad.6. Wyznacz ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym:

$$c) S_2 = 9$$

$$S_3 = 15$$

$$S_3 - S_2 = a_3$$

$$a_3 = 6$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot (a_1 + a_3) \cdot 3$$

$$15 = \frac{1}{2} \cdot (a_1 + 6) \cdot 3$$

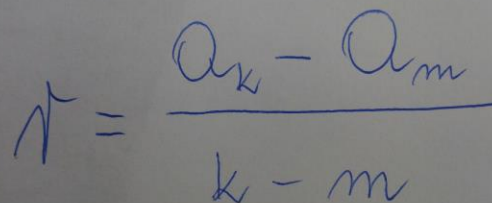
$$10 = a_1 + 6$$

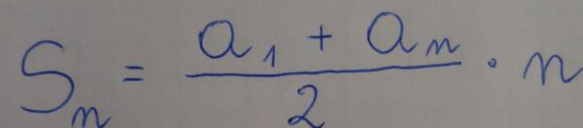
$$a_1 = 4$$

$$r = (a_3 - a_1) : 2 = 1$$

$$a_n = 4 + (n - 1) \cdot 1$$

$$a_n = n + 3$$


$$r = \frac{a_k - a_m}{k - m}$$


$$S_m = \frac{a_1 + a_m}{2} \cdot m$$

Zad.7. Wyznacz ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym:

a) $a_8 = 23, S_7 = 105$

$$S_8 = S_7 + a_8$$

$$S_8 = 23 + 105$$

$$S_8 = 128$$

$$128 = \frac{1}{2} \cdot (a_1 + a_8) \cdot 8$$

$$128 = 4(a_1 + a_8)$$

$$32 = a_1 + 23$$

$$a_1 = 9$$

$$r = (a_8 - a_1) / (8 - 1) = 2$$

$$a_n = 9 + (n - 1) \cdot 2$$

$$a_n = 2n + 7$$

b) $a_1 = 2, a_n = 50, S_n = 442$

$$442 = \frac{1}{2} \cdot (2 + 50) \cdot n$$

$$442 = 26n$$

$$n = 17$$

$$a_{17} = a_1 + 16r$$

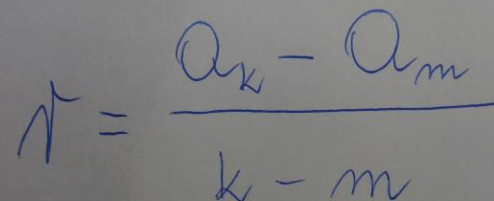
$$50 = 2 + 16r$$

$$16r = 48$$

$$r = 3$$

$$a_1 = 2$$

$$r = 3$$


$$r = \frac{a_k - a_m}{k - m}$$

Zad.7. Wyznacz ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym:

$$c) S_5 = 35, S_7 = 70$$

$$a_6 + a_7 = 35$$

$$a_6 = a_7 - r$$

$$35 = \frac{1}{2} \cdot (a_6 + a_7) \cdot 2 - \text{ciąg dwuwyrazowy } a_6 \text{ i } a_7$$

$$70 = \frac{1}{2} \cdot (a_1 + a_7) \cdot 7$$

$$35 = a_6 + a_7$$

$$20 = a_1 + a_7$$

$$15 = a_6 - a_1$$

$$15 = a_1 + 5r - a_1$$

$$15 = 5r$$

$$r = 3$$

$$a_7 - r + a_7 = 35$$

$$2a_7 = 35 + r$$

$$2a_7 = 35 + 3$$

$$a_7 = 19$$

$$a_6 = 16$$

$$a_1 = 16 - 5r = 16 - 15 = 1$$

$$a_1 = 1, r = 3$$

Zad.8. Wyznacz wzór na n – ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) , którego suma S_n początkowych wyrazów określona jest wzorem:

a) $S_n = n^2 - 3n$

$$\begin{aligned} a_n &= n^2 - 3n - [(n - 1)^2 - 3(n - 1)] = n^2 - 3n - \\ & (n^2 - 2n + 1 - 3n + 3) = n^2 - 3n - n^2 + 5n - 4 \\ & = 2n - 4 \end{aligned}$$

b) $S_n = 16n^2 + 20n$

$$\begin{aligned} a_n &= 16n^2 + 20n - [16(n - 1)^2 + 20(n - 1)] = \\ & 16n^2 + 20n - [16(n^2 - 2n + 1) + 20n + 20] = \\ & 16n^2 + 20n - 16n^2 + 32n - 16 - 20n + 20 = \\ & = 32n + 4 \end{aligned}$$