klasa I LO i Technikum (poziom podstawowy)

Temat: Badanie funkcji kwadratowej – zadania optymalizacyjne. (3 godz. lekcyjne)

Cel ogólny: kształtowanie umiejętności wykorzystywania poznanych wiadomości dotyczących funkcji kwadratowej do rozwiązywania zadań.

Cele lekcji, uczeń:
- wyznacza najmniejszą lub największą wartość funkcji kwadratowej;
- wyznacza argument, dla którego funkcja przyjmuje najmniejszą/największą wartość;
- wyznacza współrzędne wierzchołka, miejsca zerowe, dziedzinę funkcji;
- interpretuje wyniki.

Metody:
- burza mózgów;
- dyskusja dydaktyczna.

Formy pracy:
- ćwiczenia indywidualne.

Tok lekcji:
1. Sprawy organizacyjne (przywitanie, sprawdzenie obecności).
2. Podanie tematu i celów lekcji.
3. Część zasadnicza lekcji.

Wiedza o własnościach funkcji kwadratowej ma szerokie zastosowanie w rozwiązywaniu problemów praktycznych.
Zapoznamy się z przykładami wykorzystania wzoru funkcji kwadratowej, jej wykresu oraz najmniejszej i największej wartości funkcji w określonym przedziale.

Przykład 1.
Droga jednokierunkowa prowadzi przez tunel, którego przekrój poprzeczny ma kształt paraboli. Można ją opisać równaniem $y = -0{,}18x^2 + 1{,}8x$, gdzie $x \in < 0, 10 >$. Jaką maksymalną wysokość może mieć samochód dostawczy o szerokości 2,6 m, jadący środkiem tunelu, aby zmieścił się w tym tunelu?

Rozwiązanie:
Obliczmy miejsca zerowe funkcji.
Odczytamy je ze wzoru funkcji w postaci iloczynowej:
$y = -0{,}18x^2 + 1{,}8x = -0{,}18x(x - 10), stąd\ x_1 = 0, x_2 = 10$
Okazuje się, że w podstawie tunel ma szerokość 10 m.
Osią symetrii paraboli jest prosta o równaniu x = 5; współrzędne wierzchołka paraboli są równe $\left(5,\ 4\frac{1}{2}\right)$.
Samochód ciężarowy ma szerokość 2,6 m. Zatem boki samochodu będą znajdowały się w odległości 1,3 m od osi symetrii tunelu. Obliczamy wysokość tunelu w tej sytuacji:
$$f(6{,}3) = -1{,}8 \cdot (6{,}3)^2 + 1{,}8 \cdot 6{,}3 = 4{,}1958$$
Aby samochód mógł przejechać przez tunel, jego wysokość musi być mniejsza od 4,1958 m.

Przykład 2.
Boisko do siatkówki ma długość 18 m. Podczas meczu siatkówki drużyn szkolnych zawodniczka z drużyny A serwowała z wysokości 0,57 m, wzdłuż linii bocznej. Piłka przeleciała na boisko drużyny przeciwnej, osiągając maksymalną wysokość dokładnie nad siatką. Zawodniczka z drużyny B odebrała piłkę na wysokości 2,25 m, w odległości 5 m od siatki, na linii toru lotu piłki. Wiedząc, że modelem matematycznym toru lotu piłki jest fragment paraboli o równaniu $y = -0{,}03x^2 + bx + c$ (gdzie x oznacza odległość punktu boiska od końcowej linii boiska, z której wykonano serw), wyznaczymy b i c oraz obliczymy, jaką maksymalną wysokość osiągnęła piłka.

Jak będą skierowane ramiona paraboli? Jak wyznaczyć wierzchołek funkcji? Czy mamy wszystkie dane potrzebne do jego wyznaczenia? Jeśli nie, jak je wyznaczyć? (dyskusja)

Rozwiązanie:
Zawodniczka z drużyny B odebrała piłkę na linii znajdującej się w odległości 14 m od linii serwu.
Możemy przyjąć, że dziedziną funkcji $f(x) = -0{,}03x^2 + bx + c$ jest przedział $< 0, 14 >$.
Zauważmy, że $f(0) = 0{,}57$ oraz $f(14) = 2{,}25$.
Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} c = 0{,}57 \\ -0{,}03 \cdot 14^2 + b \cdot 14 + c = 2{,}25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 0{,}57 \\ 14b + c = 8{,}13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 0{,}57 \\ b = 0{,}54 \end{cases}$$

Wzór funkcji opisującej tor lotu piłki ma postać: $f(x) = -0{,}03x^2 + 0{,}54x + 0{,}57$.
Współczynnik przy x^2 we wzorze funkcji jest ujemny. Aby obliczyć, jaką największą wartość przyjmuje ta funkcja, wyznaczymy najpierw x_w.
x_w= 9, $9 \in < 0, 14 >$
Następnie obliczamy y_w.
$y_w = f(x_w), więc\ f(9) = 3$
Piłka osiągnęła maksymalną wysokość 3 m.

Przykład 3.
Właściciel sklepu kupuje w hurtowni gry komputerowe w cenie 80 zł za sztukę, a sprzedaje po 130 zł. Miesięcznie sprzedaje 40 gier. Sprzedawca zbadał rynek i oszacował, że każda obniżka ceny gry o 1zł zwiększy liczbę sprzedanych gier o jedną sztukę. Jaką nową cenę powinien ustalić właściciel sklepu, aby jego miesięczny zysk był największy?

Rozwiązanie:
Oznaczmy przez $n, n \in N_+$, wysokość obniżki ceny gry w złotych. Po obniżce ceny o *n* zł (*n* < *50*) cena jednej gry w sklepie będzie wynosić (130 - n) zł, ale jednocześnie liczba sprzedanych gier w miesiącu będzie równa $(40 + n) \cdot 80$, a kwota w zł uzyskana ze sprzedanych gier w sklepie wynosi: (40 + n) (130 - n)
Stąd miesięczny zysk właściciela sklepu jest równy:

$$f(n) = (40 + n)(130 - n) - (40 + n)80$$

Porządkujemy wzór funkcji f:

$$f(n) = -n^2 + 10n + 2000, gdzie\ n \in N_+\ i\ n < 50$$

Właściciel sklepu osiągnie największy miesięczny zysk, jeśli cena gry będzie równa 125 zł.

4. Sprawdź stopień opanowania wiadomości i umiejętności wykonując następujące ćwiczenia:

Zad.1. Liczbę 80 przedstaw w postaci różnicy dwóch liczb, aby ich suma kwadratów była najmniejsza.

Zad.2. Liczbę 24 przedstaw w postaci sumy dwóch liczb tak, aby suma kwadratu podwojonej jednej liczby i kwadratu drugiej liczby była jak najmniejsza.

Zad.3. Rozpatrujemy trójkąty równoramienne, w których suma długości podstawy i wysokości opuszczonej na tę podstawę jest równa 12 cm. Wyznacz długości boków trójkąta mającego największe pole.

Zad.4. Krótszy bok prostokąta o wymiarach 10 cm x 16 cm zwiększamy o x cm, a dłuższy zmniejszamy o x cm.

a) Wyznacz wzór funkcji opisującej pole nowego prostokąta w zależności od długości x i podaj dziedzinę tej funkcji.
b) Dla jakiej długości x pole otrzymanego prostokąta jest największe? Oblicz to pole.

Zad.5. Skup grzybów jesienią trwał 21 dni. Liczbę kilogramów grzybów skupionych w poszczególnych dniach opisuje funkcja $f(x) = -3x^2 + 72x, gdzie\ x \in N_+\ i\ x \leq 21.$ W który dniu skupiono najwięcej grzybów i ile kilogramów skupiono tego dnia?

Zad. 6. Rzucono kamień pionowo w górę z prędkością 12 m/s. Zależność między wysokością S kamienia liczoną w metrach, a czasem t liczonym w sekundach, wyraża wzór funkcji:
$S(t) = 12t - 5t^2.$ Podaj dziedzinę tej funkcji. Jaką największą wysokość osiągnie ten kamień?

Zad.7. Właściciel sklepu odzieżowego kupuje w hurtowni koszule męskie w cenie 30 zł za sztukę i sprzedaje każdą po 90 zł. Miesięcznie sprzedaje 16 koszul. Badając rynek odzieżowy, zauważył, że każda obniżka ceny koszuli o 2 zł powoduje wzrost sprzedaży o jedną sztukę. Jaką cenę koszuli powinien ustalić właściciel sklepu, aby jego miesięczny zysk był największy?

Opracowanie Ewa Radczyc
na podstawie podręcznika „Matematyka do liceum i technikum – zakres podstawowy”