Matematyka
i
wybory

Andrzej Dabrowski

Problemy wyborcze

1. Rozdzielić mandaty proporcjonalnie do liczby ludności /głosów

Metody :

- d'Hondta
- Sainte-Laguë
- Huntingtona-Hilla
- duńska
- Adamsa
- Deana
- …

A: 15 000 głosów = 15/23 wszystkich głosów

B: 7 000 głosów = 7/23 wszystkich głosów

C: 1 000 głosów = 1/23 wszystkich głosów

23 mandaty

A: = 23*15/23 = 15 mandatów

B: = 23*7/23 = 7 mandatów

C: = 23*1/23 = 1 mandat

11 mandatów

A: = 11*15/23 = 7,17 mandatów

B: = 11*7/23 = 3,35 mandatów

C: = 11*1/23 = 0,48 mandatów

11 mandatów

A: = 11*15/23 = 7,17 mandatów

B: = 11*7/23 = 3,35 mandatów

C: = 11*1/23 = 0,48 mandatów

Metoda Hamiltona (1852)

A: 7 + 0,17	A: 7+0 = 7
B: 3 + 0,35	B: 3+0 = 3
C: 0 + 0,48	C: 0+1 = 1

12 mandatów

A: = 12*15/23 = 7,83 mandatów

B: = 12*7/23 = 3,65 mandatów

C: = 12*1/23 = 0,52 mandatów

A: 7 + 0,83	A: 7+1 = 8
B: 3 + 0,65	B: 3+1 = 4
C: 0 + 0,52	C: 0+0 = 0

Zwiększyła się
liczba mandatów
a partia C straciła

Paradoks Alabamy.
W wyborach 1882 roku Izba Reprezentantów miała 299 członków.
Po analizie danych o ludności zwiększono liczbę kongresmanów do 300. Stan Alabama stracił jeden mandat.

Inne paradoksy

•Paradoks populacji: partia A traci mandat na rzecz B mimo, że zwiększyła liczbę głosów bardziej niż B.

• Niespójność: Dołączenie nowego stanu (i dodanie dla niego nowych mandatów) zmienia liczbę kongresmanów w starych stanach

Metodę Hamiltona zlikwidowano w 1901 roku

Metoda d'Hondta

dzielnik	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	**15,00**	**7,50**	**5,00**	**3,75**	**3,00**	**2,50**	**2,14**	**1,88**	**1,67**	**1,50**
B	**7,00**	**3,50**	**2,33**	**1,75**	**1,40**	1,17	1,00	0,88	0,78	0,70
C	1,00	0,50	0,33	0,25	0,20	0,17	0,14	0,13	0,11	0,10

Metoda Sainte-Laguë

dzielnik	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
A	**15,00**	**5,00**	**3,00**	**2,14**	**1,67**	**1,36**	**1,15**	**1,00**	**0,88**	**0,79**
B	**7,00**	**2,33**	**1,40**	**1,00**	0,78	0,64	0,54	0,47	0,41	0,37
C	**1,00**	0,33	0,20	0,14	0,11	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05

Podział proporcjonalny – metoda dzielnikowa

$g_1, g_2, \ldots, g_n$ liczba głosów na partie

m – liczba mandatów do rozdzielenia

x – współczynnik proporcjonalności (poszukiwany)

$$\left\lfloor \frac{g_1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{g_2}{x} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{g_n}{x} \right\rfloor = m \qquad \left\lfloor \frac{g_i}{x} \right\rfloor = m_i$$

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m$$

Przykład:

$$g_1 = 15, g_2 = 7, g_3 = 1, m = 23$$

$$\left\lfloor \frac{15}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{7}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 23 \qquad x = 1 \quad m_1 = 15, m_2 = 7, m_3 = 1$$

$$\left\lfloor \frac{15}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{7}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 12 \qquad 1 < x < 2$$

Podział proporcjonalny – metoda dzielnikowa

$$\left\lfloor \frac{15}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{7}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 12$$

$$\left\lfloor \frac{15}{1,7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{7}{1,7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1,7} \right\rfloor = \lfloor 8,82 \rfloor + \lfloor 4,12 \rfloor + \lfloor 0,59 \rfloor = 12$$

$$m_1 = 8, m_2 = 4, m_3 = 0$$

Rozwiązanie na x nie jest jednoznaczne

$$\frac{15}{9} < x \le \frac{7}{4}$$ ale zawsze $$m_1 = 8, m_2 = 4, m_3 = 0$$

Jak rozwiązać równanie:

$$\left\lfloor \frac{g_1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{g_2}{x} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{g_n}{x} \right\rfloor = m$$

$$\left\lfloor \frac{g}{x} \right\rfloor = k \Leftrightarrow k \le \frac{g}{x} < k+1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{g}{k} \ge x, \quad \frac{g}{k+1} < x$$

Zasada:

dzielimy g przez 1,2,… tak długo,

aż zejdziemy poniżej x

k jest liczbą takich dzieleń!

$$x = 1{,}7$$

$$7/1 = 7{,}00$$

$$7/2 = 3{,}50$$

$$7/3 = 2{,}33$$

$$7/4 = 1{,}75$$

$$7/5 = 1{,}20$$

$$\left\lfloor \frac{7}{1{,}7} \right\rfloor = \lfloor 4{,}12 \rfloor = 4$$

x jest
nieznane!

Zasada: dzielimy g_i przez 1,2,… tak długo, aż zejdziemy poniżej x

czyli **aż uzyskamy potrzebną liczbę mandatów**

m=3	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
15	**15,000**	**7,500**	5,000					
7	7,000	3,500	2,333					
1	1,000	0,500	0,333					

m=10, m=11	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
15	**15,000**	**7,500**	**5,000**	**3,750**	**3,000**	**2,500**	2,143	1,875
7	**7,000**	**3,500**	**2,333**	1,750	1,400	1,167	1,000	0,875
1	1,000	0,500	0,333	0,250	0,200	0,167	0,143	0,125

Metoda d'Hondta

Skąd inne metody podziału mandatów?

$$\lfloor t \rfloor = k \Leftrightarrow k \leq t < k+1$$

Rozwiązanie równania $\left\lfloor \frac{g_1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{g_2}{x} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{g_n}{x} \right\rfloor = m$ (metoda d'Hondta)

polega na dzieleniu g_i przez liczby 1,2,3,…. będące prawymi końcami przedziałów [0,1] [1,2], [2,3],… aż uzyska się potrzebną liczbę mandatów

Można zaproponować inny sposób wyboru punktów z tych przedziałów, np. wziąć lewy koniec (metoda Adamsa)

m=10, **m=11**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
15	∞	**15,000**	**7,500**	**5,000**	**3,750**	**3,000**	**2,500**	2,143	1,875
7	∞	**7,000**	**3,500**	2,333	1,750	1,400	1,167	1,000	0,875
1	∞	1,000	0,500	0,333	0,250	0,200	0,167	0,143	0,125

$$m_1 = 6, m_2 = 3, m_3 = 1 \qquad\qquad m_1 = 7, m_2 = 3, m_3 = 1$$

[0,1] [1,2], [2,3],…

Lewy koniec (metoda Adamsa)

m=10, m=11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	∞	15,000	7,500	5,000	3,750	3,000	2,500	2,143	1,875
7	∞	7,000	3,500	2,333	1,750	1,400	1,167	1,000	0,875
1	∞	1,000	0,500	0,333	0,250	0,200	0,167	0,143	0,125

$$m_1 = 6, m_2 = 3, m_3 = 1 \qquad m_1 = 7, m_2 = 3, m_3 = 1$$

Im dzielnik bliżej lewej strony tym lepiej dla małych partii

Prawy koniec (metoda d'Hondta)

m=10, m=11	1	2	3	4	5	6	7	8
15	15,000	7,500	5,000	3,750	3,000	2,500	2,143	1,875
7	7,000	3,500	2,333	1,750	1,400	1,167	1,000	0,875
1	1,000	0,500	0,333	0,250	0,200	0,167	0,143	0,125

$$m_1 = 7, m_2 = 3, m_3 = 0 \qquad m_1 = 8, m_2 = 3, m_3 = 0$$

Adamsa najbardziej liberalna d'Hondta najmniej

Środek (metoda Sainte-Laguë) 1/2, 3/2, 5/2,…

m=10, m=11	1	3	5	7	9	11	13	15
15	15,000	5,000	3,000	2,143	1,667	1,364	1,154	1,000
7	7,000	2,333	1,400	1,000	0,778	0,636	0,538	0,467
1	1,000	0,333	0,200	0,143	0,111	0,091	0,077	0,067

$$m_1 = 7, m_2 = 3, m_3 = 0 \qquad m_1 = 7, m_2 = 3, m_3 = 1$$

Metody od najbardziej do najmniej liberalnej

Metoda	Adamsa	Duńska	Deana	Hilla	Sainte-Laguë	d'Hondta (Jeffersona)
średnia	**minimum**	**ważona**	**harmoniczna**	**geometryczna**	**arytmetyczna**	**maksimum**

Z przedziału [a,a+1] wybiera się:

$$Adams: \quad a$$

$$Dunska: \frac{2a+(a+1)}{3}$$

$$Dean: \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}}$$

$$Hill: \sqrt{a(a+1)}$$

$$StLague: \frac{a+(a+1)}{2}$$

$$d'Hondt: a+1$$

Z przedziału [2,3] :

$$Adams: \quad 2{,}00$$

$$Dunska: \ 2{,}33$$

$$Dean: \quad 2{,}40$$

$$Hill: \quad 2{,}45$$

$$StLague: 2{,}50$$

$$d'Hondt: 3{,}00$$

Pożądane cechy dobrej metody podziału mandatów

1. **Anonimowość**: nie zależy od kolejności partii na liście
2. **Dokładność**: jeżeli proporcje dają liczby całkowite to jest to dobry podział
3. **Niezależność od skali**; nie jest ważne czy wyborców liczy się w setkach, tysiącach, itp. wynik jest taki sam
4. **Monotoniczność**: więcej wyborców daje większą liczbę mandatów
5. **Spójność**: metoda podziału przenosi się na mniejszą liczbę partii

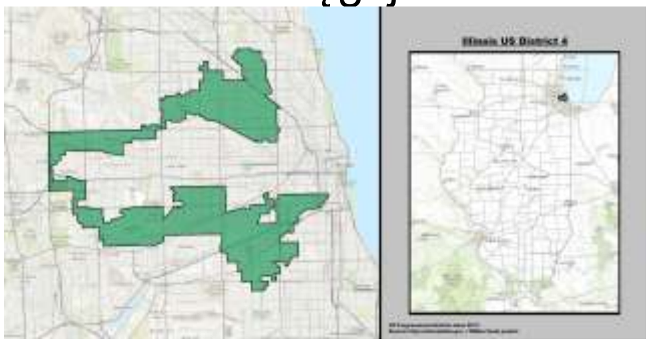
A=3,B=5,C=12 dla 20 mandatów to
A=3, B=5 dla 8 mandatów

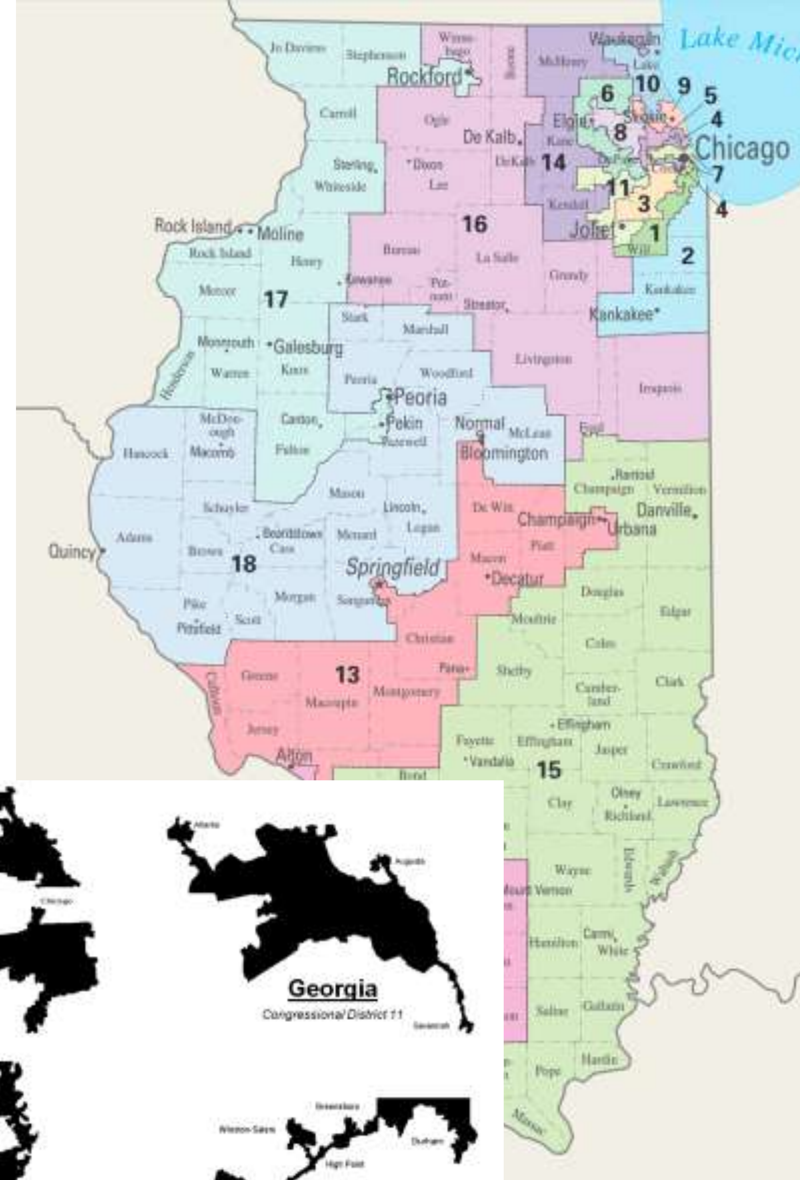
Tw.(Balins

Jedyną metodą, w której nie występuje paradoks Alabamy i populacji i spełniającą warunki 1-5 jest metoda dzielnikowa opisana wyżej

Zadania wyborcze:

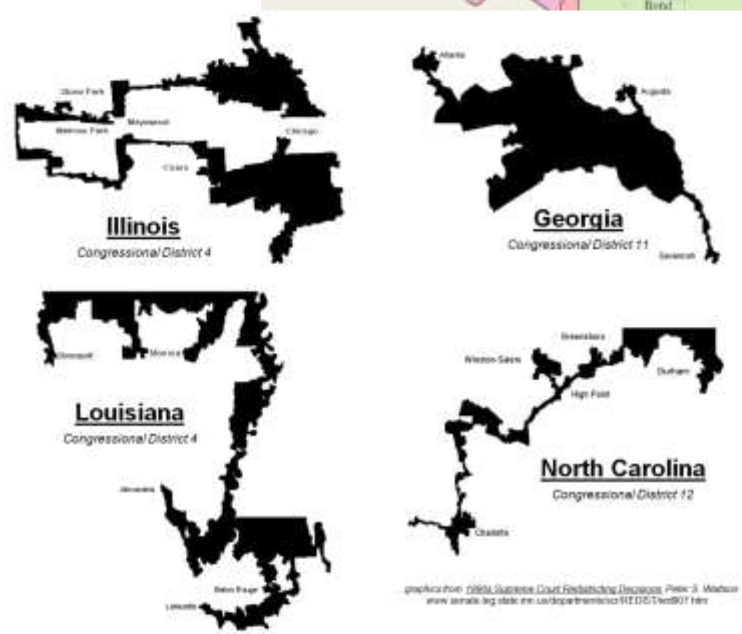
2. Podzielić teren na okręgi jednomandatowe



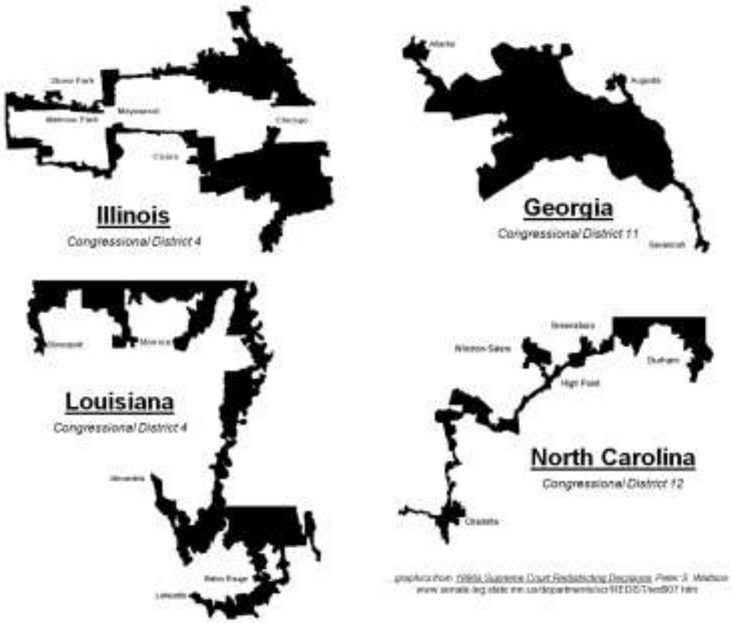


Gerry-mandering (Elbridge Gerry)

Essex County Massachussetts (1812)

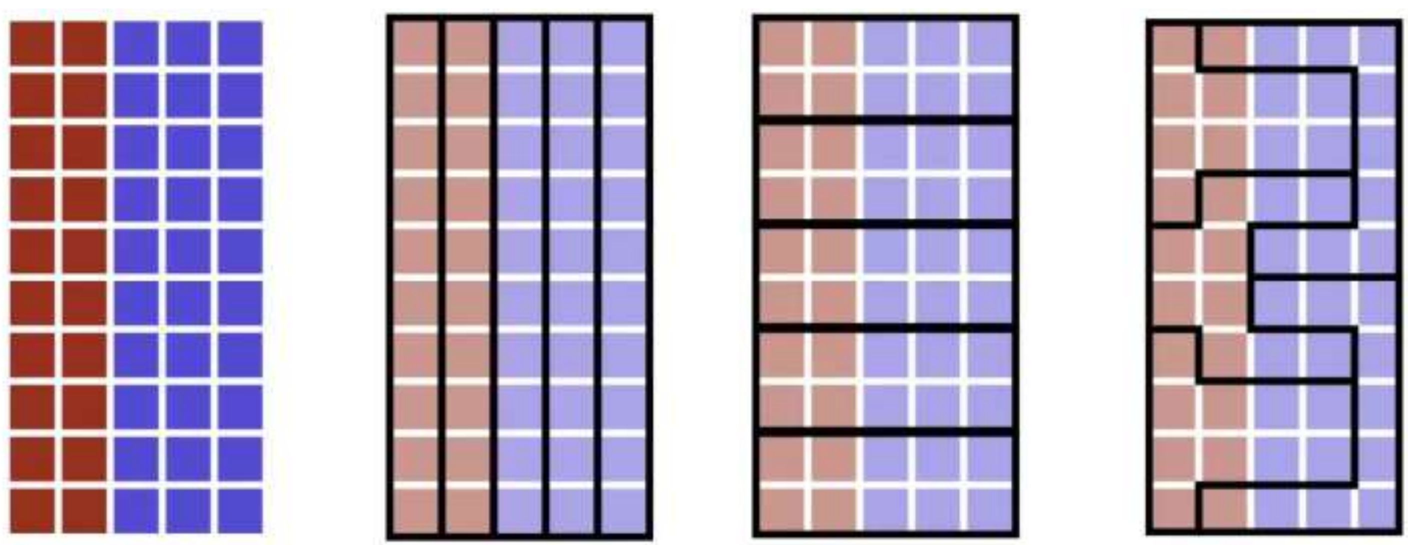


Podział na okręgi jednomandatowe



To politycy wybierają wyborców,

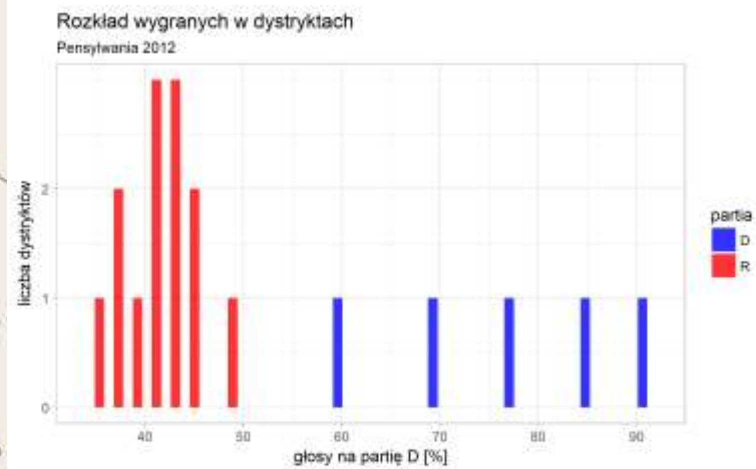
a nie wyborcy polityków



Problem

Jak udowodnić, że wystąpił gerrymandering?

Pensylwania, mapa po spisie 2010



Demokraci poparcie 50,3%

Mandaty 5/18= 27,8%

Gerrymandering jest jak pornografia:

łatwo zauważyć, trudno udowodnić

Justice Stewart sędzia SN USA

W 2016 roku sąd nakazał zmienić kształty dystryktów w stanie Wisconsin na podstawie **argumentów matematycznych**

Po raz pierwszy w historii!!