Henryk Dąbrowski

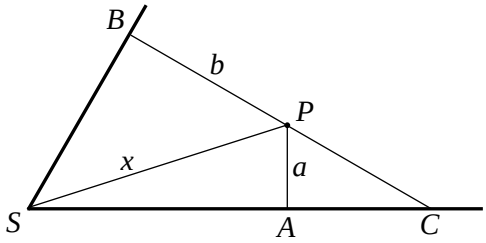
Zadania na dowodzenie z geometrii

Jednym z wymagań ogólnych nowej podstawy programowej z matematyki na czwartym etapie kształcenia, ale również i na wcześniejszych etapach, jest umiejętność prowadzenia rozumowania matematycznego czy argumentacji. Dlatego też w każdym arkuszu z egzaminu maturalnego z matematyki od roku 2010 znajdują się zadania sprawdzające te umiejętności. Zazwyczaj znajdują się w arkuszu co najmniej dwa zadania na dowodzenie, wśród nich jest zadanie z geometrii. Zadania te sprawiają zdającym trudności. Mają one jednak duże walory dydaktyczne, dają zdającym możliwość wykazania się pomysłowością, często do ich rozwiązania wystarczają im w zupełności umiejętności wyniesione z gimnazjum. Przedstawię kilka przykładów zadań na dowodzenie wraz z różnymi sposobami rozwiązań niektórych z nich.

Zadanie 1. Dany jest kąt o mierze 60° oraz punkt P leżący wewnątrz tego kąta. Odległości punktu P od ramion tego kąta są równe a i b. Udowodnij, że odległość punktu P od wierzchołka kąta jest równa $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}$.

I sposób rozwiązania

Niech C będzie punktem przecięcia prostej BP i ramienia AS kąta.



Wówczas trójkąt APC to „połowa” trójkąta równobocznego, więc $PC = 2a$. Zatem $BC = 2a + b$.

Trójkąt SBC także jest „połową” trójkąta równobocznego, więc $BS = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{2a+b}{\sqrt{3}}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BPS otrzymujmy

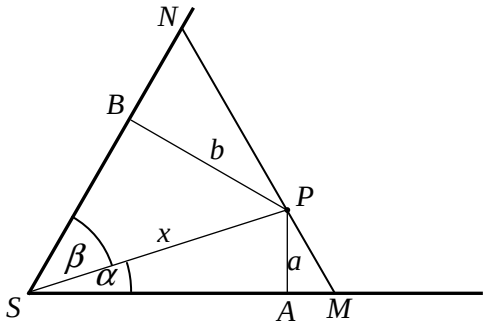
$$x = \sqrt{BS^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{2a+b}{\sqrt{3}}\right)^2 + b^2} = \sqrt{\frac{4a^2+4ab+b^2}{3} + b^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}.$$

To kończy dowód.

II sposób rozwiązania

Przez punkt P poprowadźmy odcinek MN tak, żeby trójkąt MNS był równoboczny.

Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.



Wówczas trójkąty *MAP* i *NBP* to „połowy” trójkątów równobocznych, więc

$$AM = \frac{AP}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}},\ NP = 2 \cdot AP = \frac{2a}{\sqrt{3}},\ BN = \frac{BP}{\sqrt{3}} = \frac{b}{\sqrt{3}},\ PN = 2 \cdot BP = \frac{2b}{\sqrt{3}}.$$

Wynika stąd, że długość boku trójkąta *MNS* jest równa

$$MN = MP + NP = \frac{2a}{\sqrt{3}} + \frac{2b}{\sqrt{3}} = \frac{2a+2b}{\sqrt{3}},$$

natomiast długość odcinka *AS* jest równa

$$AS = MS - AM = \frac{2a+2b}{\sqrt{3}} - \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a+2b}{\sqrt{3}}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *SAP* otrzymujemy

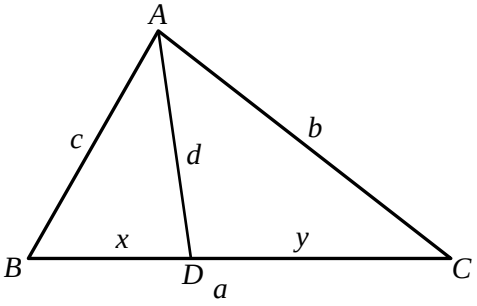
$$x = \sqrt{AS^2 + a^2} = \sqrt{\left(\frac{a+2b}{\sqrt{3}}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{a^2+4ab+4b^2}{3} + a^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}\ .$$

To kończy dowód.

III sposób rozwiązania

Początkowa część rozwiązania, a więc pomysł dorysowania odcinka *MN*, a w efekcie „zobaczenie” trójkąta równobocznego otwiera zupełnie nowe możliwości. Jedną z nich jest zastosowanie twierdzenie Stewarta. Przypomnijmy najpierw to twierdzenie, którego dowód możemy, jako nietrudne zadanie podać uczniom przy okazji omawiania twierdzenia cosinusów.

Twierdzenie Stewarta. Jeżeli punkt *D* leży na boku *BC* trójkąta *ABC* i dzieli ten bok na odcinki o długościach $BD = x$ i $DC = y$ oraz $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ i $AD = d$,



To $d^2a = b^2x + c^2y - axy$.

W naszym trójkącie *MNS* mamy więc

$$SP^2 \cdot MN = MS^2 \cdot NP + NS^2 \cdot MP - MN \cdot MP \cdot NP.$$

Trójkąt jest równoboczny, więc obie strony tej równości możemy podzielić przez $MN = MS = NS$.
Wtedy otrzymujemy

$$SP^2 = MS \cdot NP + NS \cdot MP - MP \cdot NP,$$

czyli

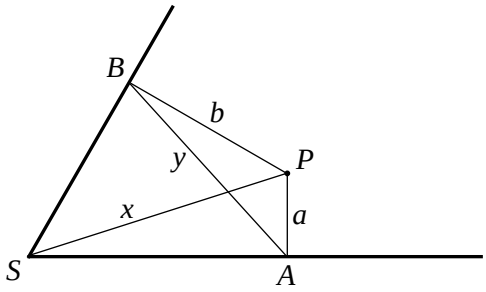
$$x^2 = \frac{2a+2b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2b}{\sqrt{3}} + \frac{2a+2b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} - \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2b}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\big((a+b)b + (a+b)a - ab\big) =,$$

$$= \frac{4}{3}\big((a+b)^2 - ab\big) = \frac{4}{3}\big(a^2 + ab + b^2\big),$$

skąd $x = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2 + ab + b^2}$, co należało wykazać.

IV sposób rozwiązania

Poprowadźmy odcinek *AB* i przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Trójkąty *PAS* i *PBS* są prostokątne, więc $AS^2 = x^2 - a^2$ oraz $BS^2 = x^2 - b^2$. Kąty *PSA* i *PSB* tych trójkątów sumują $60°$, więc kąty *SPA* i *SPB* sumując się do $180° - 60° = 120°$.
Z twierdzenia cosinusów w trójkącie *APB* otrzymujmy

$$y^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120° = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 120° = a^2 + b^2 - 2ab\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= a^2 + ab + b^2,$$

a z twierdzenia cosinusów w trójkącie *ASB* otrzymujmy

$$y^2 = AS^2 + BS^2 - 2AS \cdot BS\cos 60° = x^2 - a^2 + x^2 - b^2 - 2\sqrt{x^2 - a^2} \cdot \sqrt{x^2 - b^2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= 2x^2 - a^2 - b^2 - \sqrt{x^2 - a^2} \cdot \sqrt{x^2 - b^2}.$$

Przyrównując prawe stron otrzymanych równości dostajemy

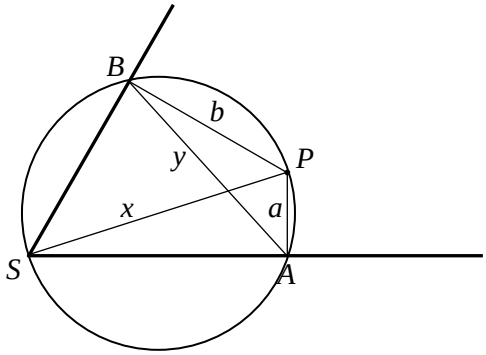
$$2x^2 - a^2 - b^2 - \sqrt{x^2 - a^2} \cdot \sqrt{x^2 - b^2} = a^2 + ab + b^2,$$

$$2x^2 - \sqrt{x^2 - a^2} \cdot \sqrt{x^2 - b^2} = 2a^2 + ab + 2b^2.$$

Po dosyć uciążliwych rachunkach otrzymujmy tezę.

V sposób rozwiązania

Tak jak w IV sposobie obliczamy $y = \sqrt{a^2 + ab + b^2}$.
Zauważmy teraz, że skoro trójkąty *PAS* i *PBS* są prostokątne i ich wspólną przeciwprostokątną jest odcinek *PS*, to okrąg o średnicy *PS* jest opisany na każdym z tych trójkątów, a także na trójkącie *ABS*.



Z twierdzenia sinusów wynika, że $\frac{y}{\sin \sphericalangle ASB} = x$, czyli $\frac{\sqrt{a^2+ab+b^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = x$, skąd

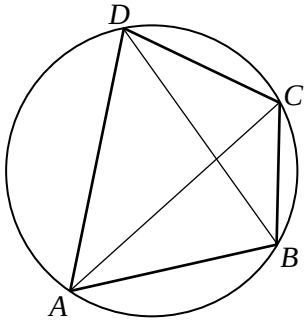
$x = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}$, co kończy ten dowód.

Zauważenie, że na czworokącie *SAPB* można opisać okrąg równie otwiera przez nami nowe możliwości rozwiązania zadania. Pokażemy jedną z nich.

VI sposób rozwiązania

Tak jak w poprzednim sposobie rozwiązania wykazujemy, że na czworokącie *SAPB* można opisać okrąg. Wykorzystamy teraz twierdzenie Ptolemeusza.

Twierdzenie Ptolemeusza. Jeżeli na czworokącie można opisać okrąg, to iloczyn długości jego przekątnych równy jest sumie iloczynów długości przeciwległych boków tego czworokąta.



$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD .$$

Po obliczeniu długości przekątnej *AB* (np. tak, jak w III sposobie rozwiązania) oraz długości boków $AS = \sqrt{x^2 - a^2}$ i $BS = \sqrt{x^2 - b^2}$, otrzymujemy z twierdzenia Ptolemeusza równanie

$$x\sqrt{a^2+ab+b^2} = a\sqrt{x^2-b^2} + b\sqrt{x^2-a^2},$$

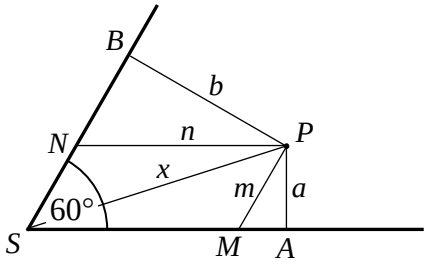
z którego wyznaczamy *x*.

Znajomość twierdzenia Ptolemeusza, podobnie jak przytoczonego wcześniej twierdzenia Stewarta, wykracza poza oczekiwany od maturzysty zakres „narzędzi i środków”, więc te narzędzia mogą wykorzystać jedynie Ci zdający, którzy przygotowywali się do konkursów lub olimpiady matematycznej.

Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

VII sposób rozwiązania

Tym razem poprowadźmy odcinki *MP* i *NP* równoległe do ramion kąta, tak jak na rysunku. Długości tych odcinków oznaczmy literami *m* i *n*.



W ten sposób otrzymaliśmy równoległobok *SMPN* o kącie ostrym $60°$, bokach długości *m* i *n*, którego przekątna *SP* ma długość *x*. Zauważmy, że *a* i *b* to wysokości tego równoległoboku. Zapiszmy jego pole na trzy sposoby

$$P_{SMPN} = n \cdot a = m \cdot b = m \cdot n \cdot \sin 60°,$$

czyli

$$n \cdot a = m \cdot b = m \cdot n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Z równości $n \cdot a = m \cdot n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $m \cdot b = m \cdot n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ wyznaczmy $m = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ oraz $n = \frac{2b}{\sqrt{3}}$.

Kąt *SMP* równoległoboku jest równy $120°$, więc z twierdzenia cosinusów w trójkącie *SMP* otrzymujemy

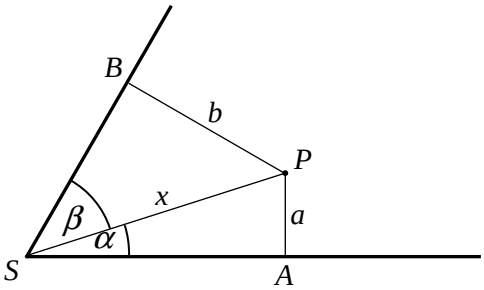
$$x^2 = \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2b}{\sqrt{3}} \cdot \cos 120° = \frac{4}{3}a^2 + \frac{4}{3}b^2 - 2 \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2b}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{4}{3}a^2 + \frac{4}{3}b^2 + \frac{4ab}{3} = \frac{4}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right).$$

Stąd $x = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2 + ab + b^2}$, co należało udowodnić.

VIII sposób rozwiązania

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wówczas

$$\sin\alpha = \frac{a}{x},\ \sin\beta = \frac{b}{x} \text{ oraz } \alpha + \beta = 60°.$$

Obliczmy cosinus kąta $\alpha+\beta$.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}.$$

Kąty α i β są ostre, więc

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2} \text{ oraz } \cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{x}\right)^2}.$$

Stąd i z poprzedniej równości dostajemy

$$\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{b}{x}\right)^2}-\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{x}=\frac{1}{2},$$

$$\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}-\frac{b^2}{x^2}+\frac{a^2b^2}{x^4}}=\frac{1}{2}+\frac{ab}{x^2}.$$

Pozostaje tylko stąd obliczyć *x*. Podnosząc obie strony do kwadratu dostajemy kolejno:

$$1-\frac{a^2}{x^2}-\frac{b^2}{x^2}+\frac{a^2b^2}{x^4}=\frac{1}{4}+\frac{ab}{x^2}+\frac{a^2b^2}{x^4},$$

$$1-\frac{a^2}{x^2}-\frac{b^2}{x^2}=\frac{1}{4}+\frac{ab}{x^2},$$

$$\frac{3}{4}=\frac{a^2+ab+b^2}{x^2},$$

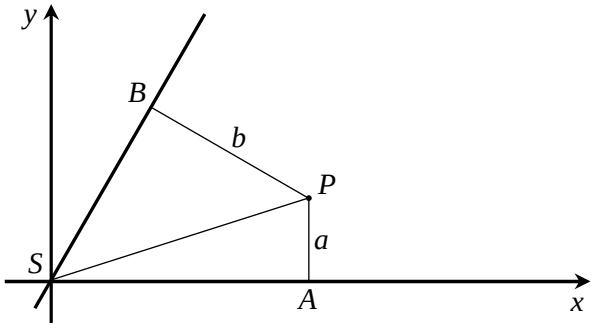
$$x^2=\frac{4}{3}\left(a^2+ab+b^2\right),$$

$$x=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}.$$

To kończy dowód.

IX sposób rozwiązania

Umieśćmy kąt w układzie współrzędnych tak, jak na rysunku.



Wtedy $S=(0,0)$, $P=(x_A,a)$, gdzie $x_A>0$ i $A=(x_A,0)$. Ramię *SB* jest zawarte w prostej nachylonej do osi *Ox* pod kątem 60°, więc współczynnik kierunkowy tej prostej jest równy $\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}$. Zatem jej równanie ma postać $y=\sqrt{3}x$, czyli $\sqrt{3}x-y=0$.

Odległość punktu *P* od prostej *SB* jest równa

$$\frac{\left|\sqrt{3}x_A - a\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}\left|\sqrt{3}x_A - a\right| = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x_A - a\right),$$

gdyż punkt *P* leży poniżej prostej *SB*.

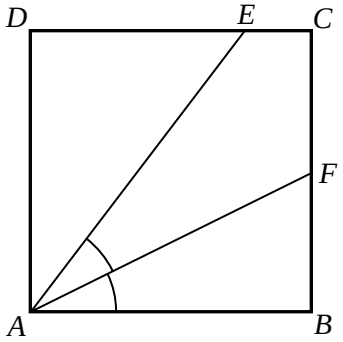
Zatem $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x_A - a\right) = b$, skąd $x_A = \frac{a+2b}{\sqrt{3}}$, czyli $A = \left(\frac{a+2b}{\sqrt{3}}, 0\right)$.

Ze wzoru na długość odcinka otrzymujemy

$$SP = \sqrt{\left(\frac{a+2b}{\sqrt{3}}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{a^2+4ab+4b^2+3a^2}{3}} = \sqrt{\frac{4a^2+4ab+4b^2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}\ .$$

To kończy dowód.

Zadanie 2. Na boku *CD* kwadratu *ABCD* leży punkt *E*. Dwusieczna kąta *BAE* przecina bok *BC* tego kwadratu w punkcie *F* (zobacz rysunek).

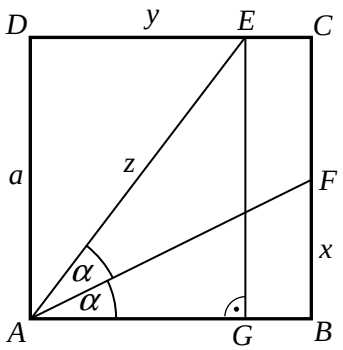


Udowodnij, że $AE = BF + DE$.

Tym razem prezentowane rozwiązania będą podane w kolejności od rozwiązania „siłowego” do rozwiązania „eleganckiego”.

I sposób rozwiązania

Poprowadźmy odcinek *EG* prostopadły do boku *AB*. Niech $AD = a$, $AE = z$, $BF = x$, $DE = y$ oraz $\sphericalangle BAF = \sphericalangle EAF = \alpha$. Pokażemy więc, że $x + y = z$.



Z trójkąta *AEG* otrzymujemy $\operatorname{tg}\sphericalangle GAE = \frac{EG}{AG}$, czyli $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{a}{y}$.

Z trójkąta *ABF* otrzymujemy natomiast $\operatorname{tg}\sphericalangle BAF = \frac{BF}{AB}$, czyli $\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{a}$.

Ze wzoru na tangens podwojonego kąta i otrzymanych równości mamy

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{a}{y},$$

$$\frac{2\cdot\frac{x}{a}}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{a}{y},$$

$$\frac{2ax}{a^2-x^2} = \frac{a}{y},$$

$$2xy = a^2 - x^2.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ADE* otrzymujemy $a^2 = z^2 - y^2$, więc

$$2xy = z^2 - y^2 - x^2,$$

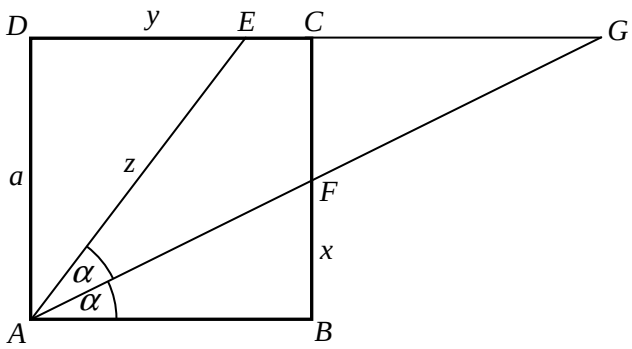
$$x^2 + 2xy + y^2 = z^2,$$

$$\left(x+y\right)^2 = z^2.$$

Stąd $x + y = z$, co należało udowodnić.

II sposób rozwiązania

Przedłużmy odcinek *AF* do przecięcia z prostą *DC* i punkt tego przecięcia oznaczmy literą *G*. Pozostałe oznaczenia przyjmijmy takie, jak w poprzednim sposobie rozwiązania ($AD = a$, $AE = z$, $BF = x$, $DE = y$, $\sphericalangle BAF = \sphericalangle EAF = \alpha$).



Proste *AB* i *DC* są równoległe, więc kąty *BAF* i *CGF* są równe, czyli $\sphericalangle CGF = \sphericalangle BAF = \alpha$. To oznacza, że trójkąt *AGE* jest równoramienny. Zatem $EG = AE = z$. Stąd wynika, że

$$DG = DE + EG = y + z.$$

Trójkąty *ABF* i *GDA* są podobne (oba są prostokątne i $\sphericalangle CGF = \sphericalangle BAF = \alpha$), więc

$$\frac{DG}{AD} = \frac{AB}{BF}, \text{ czyli } \frac{y+z}{a} = \frac{a}{x}.$$

Stąd otrzymujemy $a^2 = x\left(y+z\right)$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ADE* wynika natomiast, że $a^2 = z^2 - y^2$, więc

$$z^2 - y^2 = x\left(y+z\right),$$

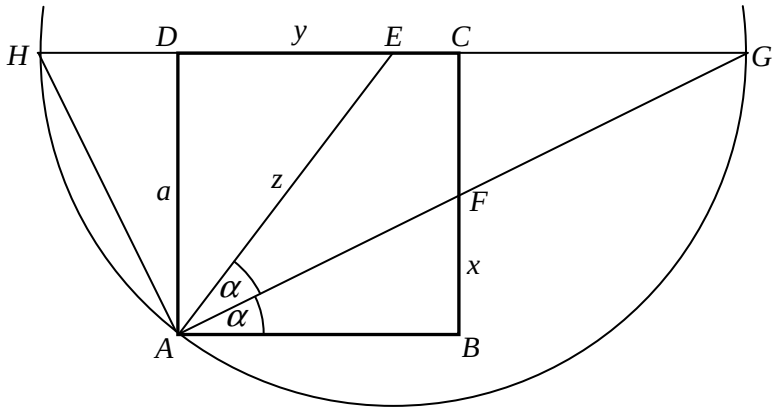
Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

$$(z-y)(z+y)=x(y+z).$$

Dzieląc obie strony tej równości przez $y+z$ otrzymujemy tezę.

III sposób rozwiązania

Przedłużmy odcinek *AF* do przecięcia z prostą *DC* w punkcie *G* oraz narysujmy odcinek *AH* prostopadły do odcinka *AG* tak, żeby jego koniec *H* leżał na prostej *DC*. Pozostałe oznaczenia przyjmijmy takie, jak poprzednio.



Jak w poprzednim sposobie rozwiązania zauważamy, że kąty *BAF* i *CGF* są równe, bo proste *AB* i *DC* są równoległe, czyli $\sphericalangle CGF=\sphericalangle BAF=\alpha$ oraz wnioskujemy stąd, że trójkąt *AGE* jest równoramienny. Zatem $EG=AE=z$. Trójkąt *GAH* jest prostokątny, $EG=AE=z$, więc punkt *E* jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, a odcinek *GH* jest jego średnicą. Zatem

$$HE=AE=GE=z.$$

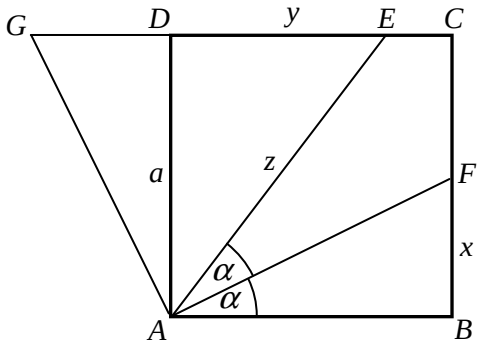
Ponadto kąt ostry przy wierzchołku *H* tego trójkąta jest równy $90^\circ-\alpha$ (bo drugi kąt ostry *AGH* to α). To z kolei oznacza, że kąt ostry *DAH* w trójkącie prostokątnym *ADH* jest równy α. Stąd wnioskujemy, że trójkąty *ADH* i *ABF* są przystające, bo (oprócz równości odpowiednich kątów) ich przyprostokątne *AD* i *AB* są równe. Zatem $HD=BF=x$, więc

$$z=AE=HD+DE=x+y.$$

To należało udowodnić.

IV sposób rozwiązania

Przyjmijmy te same oznaczenia, jak w poprzednich dwóch sposobach rozwiązania i na prostej *DC* wybierzmy taki punkt *G* nie leżący na odcinku *CD*, żeby $GD=BF=x$. Poprowadźmy też odcinek *AG*.



Trójkąty *ABF* i *ADG* są zatem przystające (oba są prostokątne, $GD=BF=x$, $AD=AB=a$). Stąd

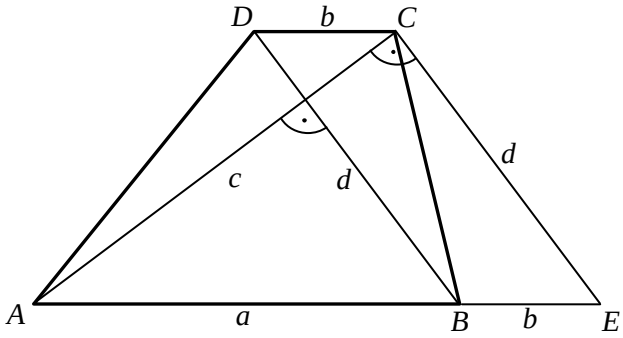
$$\sphericalangle GAD=\alpha \text{ oraz } \sphericalangle AGD=90^\circ-\alpha.$$

Zauważmy teraz, że $\sphericalangle GAE = \sphericalangle GAD + \sphericalangle DAE = \alpha + (90° - 2\alpha) = 90° - \alpha$. To z kolei oznacza, że trójkąt *AEG* jest równoramienny a jego ramiona to *AE* i *GE*. Zatem $AE = GE$, czyli $z = x + y$, co właśnie należało udowodnić.

Zadanie 3. Wykaż, że jeżeli trapez ma prostopadłe przekątne, to suma kwadratów długości tych przekątnych jest równa kwadratowi sumy długości jego podstaw.

I sposób rozwiązania

Niech *c* i *d* oznaczają tym razem długości przekątnych trapezu oraz *a* i *b*, podobnie jak poprzednio, długości jego podstaw. Poprowadźmy odcinek *CE* równoległy do *BD* tak, żeby koniec *E* tego odcinka leżał na prostej *AB*, jak na rysunku.



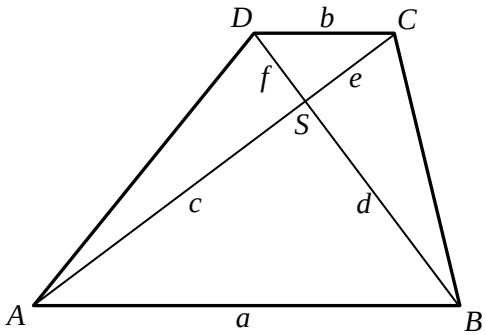
Wówczas czworokąt *BECD* jest równoległobokiem. Zatem $CE = d$ i $BE = b$. Ponieważ *AC* i *BD* są prostopadłe, *BD* i *CE* są równoległe, więc *AC* i *CE* są prostopadłe. To oznacza, że trójkąt *ACE* jest prostokątny. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy zatem

$$AC^2 + CE^2 = AE^2, \text{ czyli } c^2 + d^2 = (a+b)^2,$$

co właśnie należało udowodnić.

II sposób rozwiązania

Przyjmijmy oznaczenia takie, jak na rysunku.



Wówczas teza ma postać $(c+e)^2 + (d+f)^2 = (a+b)^2$, a po rozwinięciu nawiasów

$$c^2 + 2ce + e^2 + d^2 + 2df + f^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkątach *ABS* i *CDS* otrzymujemy $a^2 = c^2 + d^2$ oraz $b^2 = e^2 + f^2$, więc równość, jaką mamy udowodnić możemy zapisać w postaci równoważnej

$$(c^2 + d^2) + 2ce + 2df + (e^2 + f^2) = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$a^2+2(ce+df)+b^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$ce+df=ab.$$

Pozostaje więc wykazać prawdziwość tej równości.
Trójkąty *ABS* i *CDS* są podobne, gdyż kąty *BAS* i *DCS* są równe, podobnie jak kąty *ABS* i *CDS*, jako kąty naprzemianległe wyznaczone przez dwie proste równoległe. Zatem

$$\frac{c}{a}=\frac{e}{b} \text{ oraz } \frac{d}{a}=\frac{f}{b},$$

skąd $c=\frac{a}{b}\cdot e$ oraz $d=\frac{a}{b}\cdot f$. Wobec tego równość $ce+df=ab$ jest równoważna równości

$$\frac{a}{b}\cdot e^2+\frac{a}{b}\cdot f^2=ab,$$

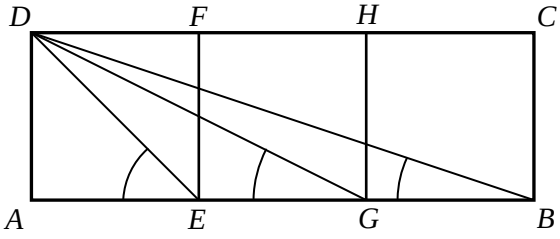
$$\frac{a}{b}\cdot\left(e^2+f^2\right)=ab.$$

Wcześniej już zauważyliśmy, że $b^2=e^2+f^2$, więc $\frac{a}{b}\cdot b^2=ab$, czyli $ab=ab$, co jest oczywiście prawdą.

Każde z omawianych zadań można, jak widać rozwiązać na kilka sposobów i nie ma jednego „słusznego” sposobu. Do jakich więc sposobów rozwiązań nakłaniać uczniów? Odpowiedź wbrew pozorom nie jest łatwa. Jest wypadkową wielu czynników takich jak, sprawność rachunkowa ucznia, ilość czasu potrzebna na takie rozwiązanie, czy też jakieś indywidualne upodobania ucznia wynikające z jego wcześniejszych własnych zmagań z zadaniami. Wydaje mi się jednak, że wskazanym byłoby przynajmniej od czasu do czasu pokazać uczniowi kilka możliwych rozwiązań zadania i omówić trudności każdej z metod. Na egzaminie maturalnym nie przyznaje się zdającym punktów za „wrażenie artystyczne”, podczas zajęć z uczniami można jednak o rozwiązaniach „siłowych” i tych „eleganckich” rozmawiać.

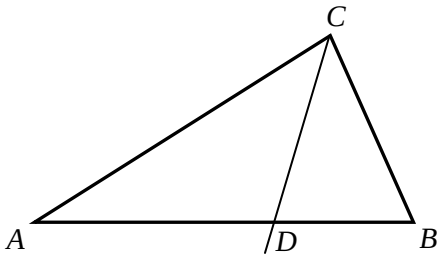
Na zakończenie proponuję trzy zadania, które można rozwiązać zarówno metodami „siłowymi”, jak i nieco bardziej elegancko. Proponuję coś dorysować.

Zadanie 4. Prostokąt *ABCD* jest złożony z trzech kwadratów: *AEFD*, *EGHF* i *GBCH* tak, jak na rysunku.



Uzasadnij, że $\sphericalangle AED+\sphericalangle AGD+\sphericalangle ABD=90^\circ$.

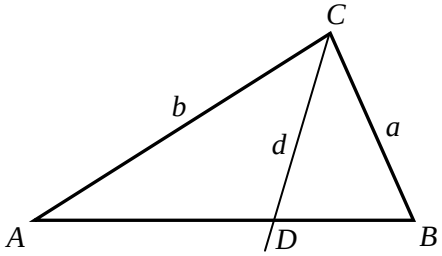
Zadanie 5. Dwusieczna kąta *ACB* przecina bok *AB* tego trójkąta w punkcie *D* (zobacz rysunek).



Wykaż, że $\frac{AD}{AC}=\frac{BD}{BC}$.

Jest to twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta.

Zadanie 6. Dwusieczna kąta *ACB* przecina bok *AB* tego trójkąta w punkcie *D*. Oznaczmy długości odcinków *AC*, *BC* i *DC* odpowiednio *b*, *a*, *d* (zobacz rysunek).



Wykaż, że $d<\frac{2ab}{a+b}$.